SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivona Purgar

POLINOMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojoj mentorici doc. dr. sc Mei Bombardelli koja me svojim stručnim savjetima vodila kroz rad i uvelike mi pomogla u njegovoj izradi. Također se zahvaljujem svojoj obitelji, a posebice roditeljima na koje sam se uvijek mogla osloniti i potražiti potporu u trenucima kada mi je bilo potrebno te sestri koja je bila uvijek uz mene. Zahvaljujem se i svom dečku za svu pomoć, podršku i strpljenje koju je imao za mene tijekom studiranja, ali i pisanja ovog rada. Iznimno hvala svim mojim prijateljicama i prijateljima koji su mi studentske dane učinili zabavnima i nezaboravnima.

Sadržaj

Uvod

Učenici se s polinomima prvi puta susreću u sedmom razredu osnovne škole preko pojma linearne funkcije, to jest polinoma prvog stupnja. U osmom razredu počinje širenje pojma polinoma putem kvadratne funkcije, tj. njenog specijalnog oblika $f(x) = x^2$. Bitno je napomenuti da se polinomi kroz osnovnu školu uvode na indirektan način nigdje ne spominjući izraz "polinom".

U drugom razredu srednje škole se na redovnoj nastavi prvi puta spominje i definira polinom prvog i drugog stupnja, crta se njegov graf te se određuju nultočke polinoma kao rješenja kvadratne jednadžbe. Na dodatnoj nastavi se znanje o polinomima produbljuje te se precizno definira pojam polinoma i osnovne operacije nad polinomima koje se svode na operacije s algebarskim izrazima s kojima su se učenici upoznali u prvom razredu srednje škole. Polinom se definira kao funkcija pa se na primjeru polinoma učenicima zapravo prvi puta objašnjava zbroj, razlika, umnožak i kvocijent funkcija. Poseban naglasak se stavlja na stupanj polinoma i kako se on mijenja pri operacijama s polinomima. Definira se pojam nultočke polinoma, njihove kratnosti te se određuje faktorizirani oblik polinoma.

U ovom diplomskom radu detaljnije ćemo obraditi polinome i njihova svojstva te ćemo opisati način na koji se na dodatnoj nastavi može obraditi tema polinomi. Rad je koncipiran na način da je na početku svakog poglavlja obrađena matematička teorija, a na kraju svake cjeline opisan način na koji bismo mogli s učenicima obraditi temu polinomi na dodatnoj nastavi. U zadnjem poglavlju nalaze se razni riješeni primjeri zadataka s polinomima koji su se pojavili na matematičkim natjecanjima.

Poglavlje 1

Algebra polinoma

U ovom poglavlju ćemo definirati polinom i navesti njegova osnovna svojstva. Proučit ćemo kada su dva polinoma jednaka te ćemo određivati zbroj, razliku, umnožak i kompoziciju dvaju polinoma. Definirati ćemo stupanj polinoma i proučiti kako se on mijenja pri prethodno navedenim operacijama. U zadnjoj cjelini poglavlja navest ćemo način obrade na dodatnoj nastavi.

1.1 O polinomima

Definicija 1.1.1. *Funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

*gdje je $k \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$, naziva se **polinom**. Brojeve $a_0, ..., a_k$ nazivamo koeficijentima polinoma.*

Budući da su koeficijenti iz $\mathbb{R}$, vrijedi:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow p(x) \in \mathbb{R}.$$

Gornja implikacija vrijedi jer je skup realnih brojeva zatvoren na operacije zbrajanja (oduzimanja) i množenja. Dakle, vrijednost $p(x)$ je također iz skupa realnih brojeva jer se dobije iz x množenjem i zbrajanjem (oduzimanjem) elemenata iz $\mathbb{R}$ konačan broj puta.

Definicija 1.1.2. *Polinom se sastoji od pribrojnika $a_k x^k, a_{k-1} x^{k-1}, \ldots, a_1 x, a_0$ koje nazivamo **monomima**. Monome polinoma zovemo još i članovima polinoma.*

Broj a_0 zovemo *slobodnim članom ili slobodnim koeficijentom* polinoma p.
Polinom p je *nulpolinom* ako vrijedi

$$p(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ako p nije nulpolinom, onda postoji najveći $n \in \mathbb{N}_0$ takav da je u izrazu (1.1) $a_n \neq 0$ i tada polinom p možemo zapisati kao

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \tag{1.2}$$

pri čemu koeficijent a_n nazivamo *vodećim koeficijentom*.
Takav broj $n \in \mathbb{N}_0$ zovemo *stupanj* polinoma. Ako polinom p koji nije nulpolinom ima stupanj n pišemo $\deg p = n$.
Nulpolinom je jedini polinom za koji se stupanj ne definira.
Ako je vodeći koeficijent jednak 1, kažemo da je *p normirani polinom*.
Zapis (1.2) nazivamo *kanonski oblik* polinoma.

1.2 Jednakost polinoma

Kao što smo prethodno rekli, polinomi su funkcije $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dakle, dva polinoma p i q su jednaka ako su jednaka kao funkcije, tj. polinomi $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su jednaki ako je $p(x) = q(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Sada želimo karakterizirati jednakost polinoma pomoću njihovih koeficijenata. Za to nam je potreban teorem o nulpolinomu.

Teorem 1.2.1. *(Teorem o nulpolinomu)*
Polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, jest nulpolinom ako i samo ako je $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Dokaz. Primijetimo da je jedan smjer tvrdnje očit. Naime, ako su svi koeficijenti polinoma jednaki nuli onda je

$$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tj. p je nulpolinom.
Preostaje dokazati drugi smjer tvrdnje.
Pretpostavimo da je $p(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ i da nisu svi koeficijenti polinoma p jednaki nuli.

Tada postoji $m \geq 0$ takav da je $a_m \neq 0$ i $a_k = 0$ za sve $k < m$.
Neka je $p = n - m$ i $b_0 = a_m,\ b_1 = a_{m+1}, \dots,\ b_p = a_{m+p} = a_n$. Dobivamo:

$$p(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \cdots + b_p x^{m+p} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podijelimo li gornju jednakost sa x^m ($x \neq 0$) slijedi

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1.3}$$

odnosno

$$-b_0 = b_1 x + \cdots + b_p x^p, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.4}$$

Označimo s $M = \max\left\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_p|\right\}$. Primijetimo da je $b_0 = a_m \neq 0$ pa je $|b_0| > 0$. Budući da je $|b_0| > 0$ iz (1.4) se lako vidi da je barem jedan od koeficijenata $b_1, b_2, \dots, b_p$ različit od nule iz čega slijedi da je $M > 0$.
Neka je $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$. Iz (1.4) slijedi

$$\begin{aligned}
|b_0| &= |b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_p x^p| \\
&\leq |b_1| x + |b_2| x^2 + \cdots + |b_p| x^p \\
&\leq Mx + Mx^2 \cdots + Mx^p \\
&= Mx(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \\
&\leq Mx\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&= Mx\left(2 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) < 2Mx.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\frac{|b_0|}{2M} < x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Uzmemo li $x = \dfrac{1}{2^k}$ pri čemu je $k = 1, 2, 3, \dots$ slijedi $\dfrac{|b_0|}{2M} < \dfrac{1}{2^k}$, odnosno

$$2^k \frac{|b_0|}{2M} < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Kada bi vrijedilo $\dfrac{|b_0|}{2M} > 0$, tada bi prema Arhimedovom aksiomu postojao $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m\dfrac{|b_0|}{2M} > 1$. Budući da vrijedi $m < 2^m$ za sve $m \in \mathbb{N}$ (lagano se pokazuje indukcijom) te koristeći nejednakost (1.5) dobivamo:

$$1 < m\frac{|b_0|}{2M} < 2^m \frac{|b_0|}{2M} < 1.$$

Dakle, dobili smo $1 < 1$ što ne vrijedi. Zaključujemo da je $\frac{|b_0|}{2M} = 0$, tj. $|b_0| = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $b_0 = a_m \neq 0$.
Dakle, ako je je $p(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ onda su svi koeficijenti polinoma jednaki 0. $\square$

Pomoću teorema o nulpolinomu sada je lako dokazati ovaj važni teorem.

Teorem 1.2.2. *(Teorem o jednakosti polinoma)*
Polinomi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *i* $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, $(p, q \neq 0)$ *pri čemu je* $a_n \neq 0$ *i* $b_m \neq 0$, *su jednaki, tj.*

$$p(x) = q(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ako i samo ako su im stupnjevi jednaki, tj.

$$n = m$$

te odgovarajući koeficijenti jednaki, tj.

$$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ \ldots, \ a_m = b_m.$$

Dokaz. Primijetimo da je jedan smjer tvrdnje očit. Naime, ako je $n = m$ i
$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$ onda je očito $p(x) = q(x)$.

Preostaje dokazati drugi smjer tvrdnje. Ako su polinomi p i q jednaki, onda im se stupanj i koeficijenti u kanonskom obliku podudaraju.
Pretpostavimo najprije da je $m \neq n$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $n > m$. Sada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

odnosno

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m - b_m)x^m + (a_{m-1} - b_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Prema teoremu o nulpolinomu sada slijedi

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{m+1} = a_m - b_m = a_{m-1} - b_{m-1} = \ldots = a_1 - b_1 = a_0 - b_0 = 0$$

što je u kontradikciji s $a_n \neq 0$.
Dakle, $m = n$.
Sada $p(x) = q(x)$ povlači

$$(a_m - b_m)x^m + (a_{m-1} - b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0,$$

iz čega, opet po teoremu o nulpolinomu, slijedi da je $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$. $\square$

Dakle, polinomi p i q su jednaki ako i samo ako su istog stupnja i ako im se koeficijenti u kanonskom obliku podudaraju.

1.3 Algebra polinoma

Nakon upoznavanja s osnovnim svojstvima i pojmovima vezanim uz polinome, slijede operacije nad polinomima.

Neka su $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ i $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ polinomi zadani svojim kanonskim zapisima.
Polinomi su funkcije pa ih možemo zbrajati, oduzimati, množiti i komponirati kao funkcije.
Dakle, vrijedi:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x),$$
$$(p-q)(x) = p(x) - q(x),$$
$$(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x),$$
$$(p \circ q)(x) = p(q(x)).$$

Preostaje raspisati i proučiti svaku operaciju.
Prvo ćemo proučiti zbrajanje i oduzimanje polinoma. Razlikovat ćemo tri slučaja.
1. slučaj: $n > m$
Zbrajanjem polinoma p i q dobivamo:

$$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Oduzimanjem polinoma q od polinoma p dobivamo:

$$(p-q)(x) = p(x)-q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) - (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m - b_m)x^m + (a_{m-1} - b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

2. slučaj: $n < m$
Zbrajanjem polinoma p i q dobivamo:

$$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$

$$= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_{n+1}x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Oduzimanjem polinoma q od polinoma p dobivamo:

$$(p-q)(x) = p(x)-q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) - (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$

$$= -b_m x^m - b_{m-1}x^{m-1} - \ldots - b_{n+1}x^{n+1} + (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

3. slučaj: $n = m$
Zbrajanjem polinoma p i q dobivamo:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Oduzimanjem polinoma q od polinoma p dobivamo:

$$(p-q)(x) = p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Ovime smo dokazali pravilo za zbrajanje i oduzimanje polinoma o kojem nam govori sljedeći teorem.

Teorem 1.3.1. *Dva se polinoma zbrajaju (oduzimaju) tako da se oduzmu njihovi članovi istog stupnja.*

Primijetimo da je zbroj (razlika) dvaju polinoma također polinom.
Uočavamo da je stupanj zbroja (razlike) dvaju polinoma u 1. slučaju jednak n, u 2. slučaju iznosi m, dok u 3. slučaju iznosi najviše $m(= n)$ no može biti i manji. Stoga vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.3.2. *Za polinome p i q koji nisu nulpolinomi vrijedi* $\deg(p \pm q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}$.

Sada ćemo proučiti množenje polinoma. Množenjem polinoma p i q dobivamo:

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) &= p(x) \cdot q(x) \\ &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0) \\ &= a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \ldots + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_0).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Dakle, dva polinoma se množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugoga, a dobiveni umnošci zbroje.

Primijetimo da je umnožak dvaju polinoma opet polinom.
Nadalje, budući da je $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$ slijedi da je i $a_n b_m \neq 0$, tj. koeficijent uz x^{n+m} nije nula. Ako p i q nisu nulpolinomi iz (1.6) vidimo da njihov umnožak nije nulpolinom te da je njegov stupanj jednak $n + m$, pri čemu je n stupanj polinoma p, a m stupanj polinoma q. Ovime smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.3.3. *Za polinome p i q koji nisu nulpolinomi vrijedi* $\deg(p \cdot q) = \deg p + \deg q$.

Ako je jedan od polinoma p i q nulpolinom, onda je njihov umnožak nulpolinom.

Kao što je rečeno, polinomi su funkcije pa ćemo njihovu kompoziciju definirati kao kompoziciju funkcija. Dakle,

$$\begin{aligned}(p \circ q)(x) = p\,(q(x)) = \\ &= a_n(b_m x^m + ... + b_0)^n + a_{n-1}(b_m x^m + ... + b_0)^{n-1} + \ldots + a_1(b_m x^m + ... + b_0) + a_0.\end{aligned}$$

Primijetimo da je stupanj kompozicije polinoma p i q jednak $m \cdot n$ čime smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.3.4. *Za polinome p i q koji nisu nulpolinomi vrijedi* $\deg(p \circ q) = \deg p \cdot \deg q$.

Ako je jedan od polinoma p i q nulpolinom, onda je njihova kompozicija nulpolinom.

Sada, kada smo se upoznali sa svojstvima zbrajanja i množenja polinoma, možemo definirati prsten polinoma.
Općenito, prsten je algebarska struktura koja se sastoji od nepraznog skupa K i dviju algebarskih operacija zbrajanje $+$ i množenje $\cdot$, $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$, pri čemu vrijede sljedeća svojstva:
(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in K$ (asocijativnost zbrajanja)
(2) $\exists\ 0 \in K$ tako da $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in K$ (postojanje neutralnog elementa za zbrajanje)
(3) $\forall a \in K\ \exists(-a) \in K$ tako da vrijedi $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (postojanje suprotnog elementa)
(4) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in K$ (komutativnost zbrajanja)
(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in K$ (asocijativnost množenja)
(6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in K$ (distributivnost množenja prema zbrajanju)

Neka su $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ i $s(x) = c_k x^k + \ldots + c_0$ polinomi s realnim koeficijentima. S obzirom na uvedeno zbrajanje i množenje polinoma lako vidimo da vrijede svojstva (1), (4), (5) i (6).
Ulogu neutralnog elementa za zbrajanje ima nulpolinom čime se lako pokaže svojstvo (2).
Nadalje, neka je $(-p)(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) + (-p(x)) &= a_n x^n + \ldots + a_0 + (-a_n x^n - \ldots - a_0) \\ &= -a_n x^n - \ldots - a_0 + a_n x^n + \ldots + a_0 = -p(x) + p(x) = 0, \end{aligned}$$

čime smo dokazali svojstvo (3). Kažemo da je $-p$ polinom suprotan polinomu p.

Dakle, skup svih polinoma $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prsten koji zovemo prsten polinoma nad $\mathbb{R}$, odnosno prsten polinoma s realnim koeficijentima i označavamo ga $\mathbb{R}[x]$.
Na njemu su definirane dvije algebarske operacije, zbrajanje i množenje polinoma, pri čemu za sve $p, q, s \in \mathbb{R}[x]$ i za $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijede gore navedena svojstva.

Slično skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima označavamo s $\mathbb{Z}[x]$, dok skup svih polinoma s racionalnim koeficijentima označavamo s $\mathbb{Q}[x]$.

1.4 Obrada cjeline na dodatnoj nastavi

O polinomima

Učenici su se na redovnoj nastavi u drugom razredu srednje škole susreli s kvadratnom funkcijom ili polinomom drugog stupnja:

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Vidimo da je gornja funkcija sastavljena od triju pribrojnika a_2x^2, a_1x, a_0. Te pribrojnike nazivamo monomima pri čemu je a_2x^2 monom drugog stupnja, a_1x monom prvog stupnja, a a_0 monom stupnja 0. Primijetimo da na jednak način možemo zamisliti monome bilo kojeg stupnja. Na primjer, monom trećeg stupnja je oblika a_3x^3, četvrtog stupnja a_4x^4, n-tog stupnja a_nx^n. Zbrajanjem ovakvih monoma dobivamo polinom. Sada možemo definirati polinom stupnja n i uvesti sve pojmove navedene u cjelini 1.1.

Nakon što su se učenici upoznali s osnovnim pojmovima vezanima uz polinome, korisno je riješiti nekoliko tipičnih primjera kako bi se navedeni pojmovi čim bolje usvojili.

Primjer 1.4.1. *Napiši polinom $p(x) = (x + 1)^3 + (x^2 - 2)^2$ u kanonskom obliku. Odredi mu stupanj te vodeći i slobodni koeficijent.*

Rješenje:
Kubirajući i kvadrirajući dane binome te sređujući dobiveni algebarski izraz dobivamo:
$p(x) = (x + 1)^3 + (x^2 - 2)^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^4 - 4x^2 + 4 = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 5.$
Dakle, kanonski oblik polinoma p je $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 5$.
Stupanj polinoma p je 4 što zapisujemo $\deg p = 4$. Vodeći koeficijent polinoma p je 1, a slobodni koeficijent 5.

Primjer 1.4.2. *Neka je p polinom takav da vrijedi $p(x - 1) = 2x^2 + 3x + 5$. Odredi njegov kanonski oblik.*

Rješenje:
Najprije uočimo da je p polinom drugog stupnja. Općenito, kanonski oblik polinoma drugog stupnja je

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Da bismo riješili dani zadatak potrebno je uvesti supstituciju $t = x - 1$. Sada slijedi da je $x = t + 1$ pa polinom p možemo zapisati kao:

$$p(t) = 2(t + 1)^2 + 3(t + 1) + 5.$$

Daljnjim sređivanjem dobivamo:

$$p(t) = 2t^2 + 4t + 2 + 3t + 3 + 5 = 2t^2 + 7t + 10.$$

Dobiveni prikaz je kanonski prikaz polinoma p.
Primijetimo da ime varijable možemo napisati po volji.

Jednakost polinoma

Sada slijedi karakterizacija jednakosti polinoma pomoću njegovih koeficijenata. Međutim, prvo je potrebno karakterizirati nulpolinom, tj. proučiti kada je neki polinom p nulpolinom. Ako su svi koeficijenti polinoma jednaki nuli onda je

$$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0 = 0,$$

tj. p je nulpolinom. Preostaje ispitati što će biti s koeficijentima polinoma za kojeg znamo da je nulpolinom.

Proučimo najprije slučaj kada je $n = 3$. Svaki polinom stupnja najviše 3 je oblika

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \tag{1.7}$$

Ako je p nulpolinom znači da svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $p(x) = 0$. Uvrštavajući u (1.7) redom $x = 0, x = 1, x = 2$ i $x = 3$ dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Rješavanjem sustava (1.8) dolazimo do jedinstvenog rješenja

$$a_0 = 0, \ \ a_1 = 0, \ \ a_2 = 0 \ \ a_3 = 0.$$

Dakle, ovime smo na primjeru polinoma stupnja $n \leq 3$ pokazali ako je p nulpolinom, onda su svi njegovi koeficijenti jednaki nuli. Isto će vrijediti i za polinome bilo kojeg stupnja. Navedeni zaključak zovemo Teorem o nulpolinomu (Teorem 1.2.1). Dokaz Teorema o nulopolinomu nije potrebno provoditi na dodatnoj nastavi jer je za njega potrebno znanje visokoškolske matematike (Arhimedov aksiom).

Sada preostaje pokazati kriterij jednakosti dvaju polinoma.
Lako se vidi ako polinomi imaju isti stupanj i ako im se koeficijenti podudaraju da se onda za svaki realni broj vrijednosti podudaraju, to jest polinomi su jednaki.
Preostaje pokazati ako su polinomi p i q jednaki, da im se onda stupanj i koeficijenti podudaraju.
Kao motivaciju ćemo istražiti kriterij jednakosti polinoma drugog stupnja.
Neka su $p(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ i $q(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$ dva polinoma zapisana u kanonskom obliku. Neka vrijedi $p(x) = q(x)$, tj. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ za svaki realan broj x. Sada uzmemo tri različite vrijednosti varijable x, na primjer, $x = 1$, $x = 0$ i $x = -1$. Uvrstimo ih u jednadžbu:

$$\begin{aligned}
x = 1 \quad &\Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2,\\
x = 0 \quad &\Rightarrow c_1 = c_2,\\
x = -1 \; &\Rightarrow a_1 - b_1 + c_1 = a_2 - b_2 + c_2.
\end{aligned}$$

Iz druge jednakosti dobivamo $c_1 = c_2$. Uvrštavanjem u preostale jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
a_1 + b_1 &= a_2 + b_2,\\
a_1 - b_1 &= a_2 - b_2.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo $2a_1 = 2a_2$, to jest $a_1 = a_2$, pa slijedi da je i $b_1 = b_2$.
Dakle, vidimo da su polinomi drugog stupnja jednaki ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki. Preostaje provjeriti vrijedi li to i općenito. Učenike se sada upoznaje s teoremom o jednakosti polinoma (Teorem 1.2.2.) te se pomoću teorema o nulpolinomu provodi njegov dokaz.

Primjer 1.4.3. *Dan je polinom $p(x) = x^3 - x + 1$. Odredi polinom q takav da vrijedi $q(x - 1) = p(x)$.*

Rješenje:
Dakle, tražimo polinom q takav da je $p(x) = q(x - 1)$.
Najprije uočimo da i q mora biti polinom trećeg stupnja. Neka je $q(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Tada je $q(x - 1) = A(x - 1)^3 + B(x - 1)^2 + C(x - 1) + D$. Prema uvjetu zadatka slijedi

$$x^3 - x + 1 = A(x - 1)^3 + B(x - 1)^2 + C(x - 1) + D.$$

Zadatak ćemo riješiti ako odredimo A, B, C i D tako da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi prethodna jednakost. Sređujući desnu stranu dobivamo

$$x^3 - x + 1 = A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B(x^2 - 2x + 1) + C(x - 1) + D,$$

odnosno

$$x^3 - x + 1 = Ax^3 + (-3A + B)x^2 + (3A - 2B + C)x + (-A + B - C + D).$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma slijedi:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ -3A + B &= 0, \\ 3A - 2B + C &= -1, \\ -A + B - C + D &= 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem dobivenog sustava dobivamo $A = 1$, $B = 3$, $C = 2$ i $D = 1$.
Konačno imamo

$$x^3 - x + 1 = (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1.$$

Traženi polinom je $q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Algebra polinoma

Nakon što su se učenici upoznali s teoremima o nulpolinomu i teoremu o jednakosti polinoma slijede operacije nad polinomima. Svaka operacija će se objasniti na konkretnom primjeru pritom će se poseban naglasak staviti na stupanj dobivenog polinoma.
Učenicima pravila za zbrajanje (oduzimanje) polinoma neće predstavljati problem budući da ona slijede iz manipuliranja algebarskim izrazima s kojima su se učenici već susreli. Dakle, ovdje ćemo naglasak staviti na određivanje stupnja polinoma dobivenog zadanom operacijom. Učenike možemo podijeliti u četiri grupe. Svaka grupa rješava po jedan od zadataka navedenih u nastavku (Primjeri 1.4.4, 1.4.5, 1.4.6 i 1.4.7). Nakon rješavanja učenici uspoređuju zadatke i dobivena rješenja te otkrivaju koliki je stupanj polinoma dobivenog zbrajanjem (oduzimanjem) dvaju polinoma.

Primjer 1.4.4. *Odredi zbroj polinoma $p(x) = 3x^2 + x - 2$ i $q(x) = x^3 - 3x + 5$.*

Rješenje:
Polinomi se zbrajaju tako da se zbroje njihovi članovi istog stupnja. Slijedi:

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 3x^2 + x - 2 + x^3 - 3x + 5 = x^3 + 3x^2 - 2x + 3.$$

Primijetimo da je $\deg p = 2$, a $\deg q = 3$. Zbrajanjem ta dva polinoma dobivamo polinom stupnja $\deg(p + q) = 3$, dakle stupanj polinoma dobiven zbrajanjem polinoma p i q u ovom je slučaju jednak stupnju polinoma q koji je većeg stupnja.

Primjer 1.4.5. *Odredi zbroj polinoma* $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ *i* $q(x) = -x^3 - 4x + 6$.

Rješenje:
Zbrajanjem polinoma dobivamo

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3 + (-x^3) - 4x + 6 = 2x^2 - 3x + 3.$$

Primijetimo da su polinomi p i q istog stupnja, tj. $\deg p = \deg q = 3$. Međutim, zbrajanjem ta dva polinoma dobivamo polinom stupnja $\deg(p + q) = 2$.

Primjer 1.4.6. *Odredi zbroj polinoma* $p(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1$ *i* $q(x) = 3x^3 + 8x - 4$.

Primjer 1.4.7. *Odredi zbroj polinoma* $p(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1$ *i* $q(x) = -x^5 + 8x^4 - 2x^2 + 4$.

Primjer 1.4.6 i Primjer 1.4.7 se rješavaju analogno kao Primjer 1.4.4 i Primjer 1.4.5 redom zbog čega njihovo rješenje nije posebno navedeno.
Rješavanjem prethodna četiri primjera učenici naslućuju se da se zbrajanjem dva polinoma p i q dobiva polinom pri čemu stupanj tog polinoma ne može biti veći od stupnja polinoma s većim stupnjom (Primjer 1.4.4 i 1.4.6), ali može biti manji od stupnja oba polinoma (Primjer 1.4.5 i 1.4.7). Sada preostaje izreći pravilo za zbrajanje i oduzimanje polinoma (Teorem 1.3.1.) te provesti diskusiju o stupnju polinoma dobivenog zbrajanjem (oduzimanjem) polinoma što je navedeno u cjelini 1.3.

Za otkrivanje pravila za množenje polinoma učenike možemo podijeliti u dvije grupe pri čemu svaka grupa rješava po jedan od zadataka navedenih u nastavku (Primjer 1.4.8 i 1.4.9). Nakon rješavanja učenici uspoređuju zadatke i rješenja te otkrivaju pravilo za množenje polinoma te koliki je stupanj polinoma dobivenog množenjem dvaju polinoma.

Primjer 1.4.8. *Odredi umnožak polinoma* $p(x) = 3x^2 + x - 2$ *i* $q(x) = x^3 - 3x + 5$.

Rješenje:
Dva polinoma pomnožiti ćemo tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugoga, a dobiveni umnošci zbroje.

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) &= p(x) \cdot q(x) = (3x^2 + x - 2) \cdot (x^3 - 3x + 5)\\ &= 3x^2(x^3 - 3x + 5) + x(x^3 - 3x + 5) - 2(x^3 - 3x + 5)\\ &= 3x^5 - 9x^3 + 15x^2 + x^4 - 3x^2 + 5x - 2x^3 + 6x - 10\\ &= 3x^5 + x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 11x - 10.\end{aligned}$$

Primjer 1.4.9. *Odredi umnožak polinoma* $p(x) = 4x - 3$ *i* $q(x) = x^3 + x + 2$.

Rješenje:
Računat ćemo na isti način kao u Primjeru 1.4.8.

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) &= p(x) \cdot q(x) = (4x - 3) \cdot (x^3 + x + 2)\\ &= 4x\,(x^3 + x + 2) - 3(x^3 + x + 2)\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 8x - 3x^3 - 3x - 6\\ &= 4x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6.\end{aligned}$$

Primijetimo da smo u Primjeru 1.4.8 množeći polinome drugog i trećeg stupnja dobili polinom petog stupnja, a u Primjeru 1.4.9 množeći polinome prvog i trećeg stupnja dobili polinom četvrtog stupnja. Dakle, naslućujemo da će umnožak dvaju polinoma biti polinom i njegov stupanj će biti jednak zbroju stupnjeva polinoma koje množimo. Preostaje izreći teorem o stupnju polinoma dobivenog množenjem dvaju polinoma, tj. Teorem 1.3.3. i provesti njegov dokaz, što je navedeno u cjelini 1.3.

Na sličan način učenici mogu otkriti pravilo o stupnju kompozicije polinoma.

Primjer 1.4.10. *Odredi kompoziciju polinoma* $q(x) = x - 1$ *i* $p(x) = x^2 + 3x - 1$.

Rješenje:
Polinomi su funkcije pa njihovu kompoziciju definiramo kao kompoziciju funkcija. Slijedi:

$$\begin{aligned}(p \circ q)(x) &= p(q(x)) = (x - 1)^2 + 3(x - 1) - 1\\ &= x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 - 1\\ &= x^2 + x - 3.\end{aligned}$$

Dobili smo polinom drugog stupnja.

Primjer 1.4.11. *Odredi kompoziciju polinoma* $q(x) = x^2 + 1$ *i* $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$.

Rješenje:
Računat ćemo analogno kao u Primjeru 1.4.10.

$$\begin{aligned}(p \circ q)(x) &= p(q(x)) = (x^2 + 1)^3 + 2(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1) - 1\\ &= x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + 2(x^4 + 2x^2 + 1) + x^2 + 1 - 1\\ &= x^6 + 5x^4 + 8x^2 + 3.\end{aligned}$$

Dobili smo polinom šestog stupnja.

Primijetimo da smo u Primjeru 1.4.10 kompozicijom polinoma prvog i drugog stupnja dobili polinom drugog stupnja, a u Primjeru 1.4.11 kompozicijom polinoma drugog i trećeg stupnja dobili polinom šestog stupnja. Dakle, naslućujemo da će kompozicija dvaju polinoma biti polinom čiji je stupanj jednak umnošku stupnjeva polinoma koje komponiramo. Preostaje izreći teorem o stupnju polinoma dobivenog kompozicijom dvaju polinoma, tj. Teorem 1.3.4. i provesti njegov dokaz, što je navedeno u cjelini 1.3.

Poglavlje 2

Djeljivost polinoma

U prethodnom poglavlju proučili smo kako zbrajati, oduzimati, množiti i komponirati dva polinoma. Preostaje proučiti kako podijeliti dva plinoma. Dakle, u ovom poglavlju ćemo proučiti kada je jedan polinom djeljiv drugim, opisati postupak dijeljenja dvaju polinoma te navesti neka svojstva dobivenog ostatka.

2.1 Dijeljenje polinoma

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je polinom p djeljiv polinomom $s \neq 0$ ako postoji polinom q takav da za svaki realan broj x vrijedi $p(x) = s(x) \cdot q(x)$.*

Općenito, o dijeljenju dvaju polinoma nam najbolje govori sljedeći teorem.

Teorem 2.1.2. *(Teorem o dijeljenju s ostatkom) Za svaka dva polinoma $p, s \in \mathbb{R}[x]$, $s \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

pri čemu je $r = 0$ ili $\deg r < \deg s$.

Dokaz. Dokažimo prvo da postoje polinomi q i r koji imaju dano svojstvo.

Ako je $p = 0$ onda tvrdnja vrijedi za $q = r = 0$.

Ako je $p \neq 0$ razlikovat ćemo dva slučaja:

1) $\deg p < \deg s$

U ovom slučaju jednakost $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ zadovoljavaju polinomi $q = 0$ i $r = p$ i vrijedi $\deg r = \deg p < \deg s$.

2) $\deg p \geq \deg s$

Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po stupnju $\deg p$.

Za $\deg p = 0$ slijedi da je i $\deg s = 0$. Dakle, p i s su konstantni polinomi, tj. $p, s \in \mathbb{R}$. Sada jednakost $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ zadovoljavaju polinomi $q = \frac{p}{s}$ i $r = 0$.

Pretpostavimo da za sve polinome stupnja manjeg od n vrijedi tvrdnja, tj. da postoje polinomi r i q takvi da je $\deg r < \deg s$ i vrijedi $p = s \cdot q + r$. Neka su kanonski zapisi polinoma p i s dani sa

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$s(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0,$$

te neka je $n \geq m$.
Tada možemo definirati polinom $p_1(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}s(x) = (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-1})x^{n-1} + \cdots$$

Budući da je stupanj svih preostalih monoma manji od $n-1$, to je $\deg p_1 \leq n-1$.
Na polinom p_1 primijenimo pretpostavku. Postoje polinomi q_1 i r_1, $\deg r_1 < \deg s$ takvi da

$$s(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) = p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}s(x).$$

Odatle je

$$p(x) = s(x) \cdot (q_1(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}) + r_1(x).$$

Sada lako vidimo da polinomi

$$q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}, \quad r(x) = r_1(x)$$

zadovoljavaju jednakost $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, pri čemu je $\deg r < \deg s$. Ovim je dokazana egzistencija.

Preostaje dokazati jedinstvenost.
Pretpostavimo da za dane polinome p i s postoje polinomi q, r i q' i r' takvi da $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x), \text{ uz } r = 0 \text{ ili } \deg r < \deg s$$

i

$$p(x) = s(x)q'(x) + r'(x), \text{ uz } r = 0 \text{ ili } \deg r' < \deg s.$$

Sada iz tih jednakosti oduzimanjem slijedi

$$s(x)(q(x) - q'(x)) + (r(x) - r'(x)) = 0. \tag{2.1}$$

Ako je $r - r' = 0$, to povlači da je i $s(q - q') = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Budući da je $s \neq 0$, slijedi da je i $q - q' = 0$ iz čega slijedi jedinstvenost.
Također, ako je $q - q' = 0$ slijedi $r - r' = 0$.

Pretpostavimo sada da je $r - r' \neq 0$ i $q - q' \neq 0$, onda uspoređujući stupnjeve iz (2.1) zaključujemo

$$\deg s + \deg(q - q') = \deg(r - r'). \tag{2.2}$$

Iz Teorema 1.3.2. slijedi $\deg(r - r') \leq \max(\deg r, \deg r')$. Sada uvrštavanjem u (2.2) dobivamo

$$\deg s + \deg(q - q') = \deg(r - r') \leq \max(\deg r, \deg r'). \tag{2.3}$$

Primijetimo da općenito vrijedi da je stupanj razlike dva polinoma veći ili jednak 0, tj. $\deg(q - q') \geq 0$. Iz toga slijedi

$$\deg s \leq \deg s + \deg(q - q'). \tag{2.4}$$

Sada iz (2.3) i (2.4) slijedi

$$\deg s \leq \deg s + \deg(q - q') = \deg(r - r') \leq \max(\deg r, \deg r').$$

Nadalje, kako je $\deg r < \deg s$ i $\deg r' < \deg s$ slijedi

$$\deg s \leq \deg s + \deg(q - q') = \deg(r - r') \leq \max(\deg r, \deg r') < \deg s.$$

Dakle, dobili smo da je $\deg s < \deg s$, što je kontradikcija. Dakle, slučaj $r \neq r'$ i $q \neq q'$ nije moguć. □

Općenito, ako je $r \neq 0$, polinom q zove se nepotpuni kvocijent polinoma p i s, a polinom r ostatak pri dijeljenju polinoma p i s.
Ako je $r = 0$, onda se q zove *kvocijent polinoma* p i s. Tada kažemo da je polinom p djeljiv polinomom s i pišemo $q = p/s$.
Upoznat ćemo se s još jednim teoremom koji će biti od velike koristi pri dijeljenju polinoma s polinomom prvog stupnja.

Teorem 2.1.3. *(Bézoutov[1] teorem) Neka je $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $a \in \mathbb{R}$. Ostatak pri dijeljenju polinoma p sa $x - a$ iznosi $p(a)$.*

Dokaz. Neka je $p \in \mathbb{R}[x]$ i $s(x) = x - a$, gdje je $a \in \mathbb{R}$.
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni polinom $q \in \mathbb{R}[x]$ i jedinstveni realan broj r takvi da vrijedi:

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[1] Étienne Bézout (1730.-1783.) - francuski matematičar

Kako ova jednakost vrijedi za svaki realan broj x, onda mora vrijediti i za $x = a$. Zato je

$$p(a) = r.$$

Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma $p(x)$ sa $x - a$ jednak je $p(a)$. □

2.2 Obrada cjeline na dodatnoj nastavi

Dijeljenje polinoma

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da zbrajanjem i množenjem dvaju polinoma uvijek dobivamo polinom. Pri dijeljenju dvaju polinoma neće uvijek biti tako. Primjerice, dijeleći polinom manjeg stupnja polinomom većeg stupnja nećemo dobiti polinom već pravu racionalnu funkciju.
Dijeljenje polinoma većeg stupnja polinomom manjeg stupnja provodimo na sličan način kao dijeljenje brojeva zbog čega bi bilo korisno najprije riješiti jedan primjer dijeljenja prirodnih brojeva.

Primjer 2.2.1. *Podijeli broj* 4235 *brojem* 8.

Rješenje:

$$\begin{array}{l}
\ \ 4235 : 8 = 529 \\
-\underline{40} \\
\ \ \ \ 23 \\
\ \ -\underline{16} \\
\ \ \ \ \ \ 75 \\
\ \ \ \ -\underline{72} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 3
\end{array}$$

Najprije početni dvoznamenkasti dio djeljenika, tj. broj 42, podijelimo djeliteljem, tj. brojem 8 . Dobivamo količnik 5 kojeg zapisujemo iza znaka jednakosti. Zatim množimo dobiveni količnik 5 s djeliteljem, tj. brojem 8 i dobiveni rezultat zapisujemo ispod početnog dvoznamenkastog dijela djeljenika te ih oduzmemo. Dobivamo broj 2 kojeg zapisujemo ispod te pokraj njega ”spustimo” sljedeću znamenku djelitelja, tj. znamenku 3. Dobivamo broj 23 kojeg dijelimo s djeliteljem, tj. brojem 8. Postupak se ponavlja sve dok ne ”spustimo” zadnju znamenku.
Dakle, dijeljenjem broja 4235 brojem 8 dobivamo kvocijent 529 i ostatak 3.
Provjerimo dobiveni rezultat:

$$529 \cdot 8 + 3 = 4232 + 3 = 4235.$$

Kada smo s učenicima ponovili postupak dijeljenja prirodnih brojeva, možemo krenuti s prvim primjerom dijeljenja polinoma.

Primjer 2.2.2. *Podijelimo polinom* $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ *polinomom* $s(x) = x - 2$.

Rješenje:

Kao što je već i bilo napomenuto, postupak dijeljenja dva polinoma provodi se na sličan način kao i dijeljenje prirodnih brojeva. Razlika je u tome što kod dijeljenja polinoma nemamo samo brojeve već i varijable.
Najprije podijelimo x^3 sa x. Dobivamo x^2 i zatim njega množimo s $x - 2$, a dobiveni umnožak zapisujemo ispod djeljenika tj. ispod x^3-4x^2+6x-4 na način da se monomi istog stupnja nalaze jedan ispod drugog. Monome jednakog stupnja oduzmemo i "spuštamo" sljedeći monom djeljenika. Postupak se zatim nastavlja i izgleda ovako:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) : (x - 2) = x^2 - 2x + 2 \\
-\underline{(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad -2x^2 + 6x \\
\quad -\underline{(-2x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad 2x - 4 \\
\qquad\quad -\underline{(2x - 4)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Provjerimo dobiveni rezultat:

$$(x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2x^2 + 4x - 4 = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

Primijetimo da je u Primjeru 2.2.2. ostatak dijeljenja jednak nuli. Razmotrimo i jedan slučaj kada je ostatak različit od nule.

Primjer 2.2.3. *Podijelimo polinom* $p(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 10$ *polinomom* $s(x) = x + 1$.

Rješenje:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 + 7x + 10) : (x + 1) = x^2 + 2x + 5 \\
-\underline{(x^3 + x^2)} \\
\qquad 2x^2 + 7x \\
\quad -\underline{(2x^2 + 2x)} \\
\qquad\qquad 5x + 10 \\
\qquad\quad -\underline{(5x + 5)} \\
\qquad\qquad\quad 5
\end{array}$$

Provjerimo dobiveni rezultat:

$$(x^2 + 2x + 5) \cdot (x + 1) + 5 = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 5x + 5 + 5 = x^3 + 3x^2 + 7x + 10.$$

Dakle, ostatak dijeljenja zadanih polinoma je broj 5. Primijetimo da je to polinom stupnja 0.

Primjer 2.2.4. *Podijelimo polinom* $p(x) = 6x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 1$ *polinomom* $s(x) = 2x^2 - 3$.

Rješenje:

$$
\begin{array}{l}
(6x^4 - 2x^3 - 11x^2 \qquad + 1) : (2x^2 - 3) = 3x^2 - x - 1 \\
-\underline{(6x^4 \qquad\quad - 9x^2)} \\
\qquad\quad -2x^3 - 2x^2 \\
\qquad -\underline{(-2x^3 \qquad\quad + 3x)} \\
\qquad\qquad\quad -2x^2 - 3x + 1 \\
\qquad\qquad -\underline{(-2x^2 \qquad\quad + 3)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -3x - 2
\end{array}
$$

Provjerimo dobiveni rezultat:

$$(3x^2 - x - 1) \cdot (2x^2 - 3) - 3x - 2 = 6x^4 - 9x^2 - 2x^3 + 3x - 2x^2 + 3 - 3x - 2 = 6x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 1.$$

Primijetimo da je ostatak dijeljenja polinom prvog stupnja.

Promatrajući prethodna tri primjera vidimo da smo polinom p mogli zapisati u obliku $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, pri čemu je s polinom kojim smo dijelili polinom p, q polinom koji smo dobili dijeljenjem polinoma p polinomom s, a r ostatak pri dijeljenju. U primjeru 2.2.2. je $r = 0$ dok je u ostala dva primjera $\deg r < \deg s$. Općenito, o dijeljenju dvaju polinoma govori teorem o dijeljenju s ostatkom.
Za svaka dva polinoma $p, s \in \mathbb{R}[x]$, $s \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

pri čemu je $r = 0$ ili $\deg r < \deg s$.

Njegov dokaz naveden je u cjelini 2.1. te ga je moguće provesti s učenicima.
Polinom q zovemo kvocijent polinoma p i s, a polinom r ostatak pri dijeljenju polinoma p polinomom s. Ako je $r = 0$ onda je polinom p djeljiv polinomom s.

Primjer 2.2.5. *Neka je* $p \in \mathbb{R}[x]$. *Odredi ostatak pri dijeljenju polinoma* $p(x) = 101x^{100} + 100x^{98} + \cdots + 2x + 1$ *polinomom* $s(x) = x^2 - 1$.

Rješenje:
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, ostatak je polinom najviše prvog stupnja, tj. $r(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Označimo kvocijent sa $q(x)$. Slijedi jednakost:

$$101x^{100} + 100x^{98} + \ldots + 2x + 1 = (x^2 - 1)q(x) + (ax + b), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Uvrstimo li u jednakost redom nultočke polinoma $s(x) = x^2 - 1$, tj. $x = 1$ i $x = -1$ dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 101 + 100 + \ldots + 2 + 1 &= a + b, \\ 101 - 100 + \ldots - 2 + 1 &= -a + b. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Primijetimo da je na lijevoj strani jednakosti u prvoj jednadžbi sustava (2.5) zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 102:

$$101 + 100 + \ldots + 2 + 1 = \frac{101 \cdot 102}{2} = 101 \cdot 51 = 5151$$

Lijevu stranu jednakosti u drugoj jednadžbi sustava (2.5) možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} 101 - 100 + \ldots - 2 + 1 &= (101 - 100) + (99 - 98) + \cdots + (3 - 2) + 1 \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{51 \text{ puta}} = 51. \end{aligned}$$

Sustav (2.5) sada možemo zapisati kao:

$$5151 = a + b$$

$$51 = -a + b.$$

Rješavanjem sustava dobivamo $a = 2550$, $b = 2601$. Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma p polinomom q je $r(x) = 2550x + 2601$.

Slijedi upoznavanje s Bézoutovim teoremom koji će biti od velike koristi pri dijeljenju polinoma kada je djelitelj polinom prvog stupnja. Učenike ćemo podijeliti u dvije grupe. Jedna grupa će trebati izračunati vrijednost polinoma p iz primjera 2.2.2. za $x = 2$, dok će druga grupa trebati izračunati vrijednost polinoma p iz primjera 2.2.3. za $x = -1$. Učenici bi trebali doći do zaključka da je dobivena vrijednost jednaka ostatku pri dijeljenju polinoma p s danim polinomom prvog stupnja.
Nakon dobivenih zaključaka izriče se navedeni teorem i provodi se njegov dokaz kao što je navedeno u cjelini 2.1.

Primjer 2.2.6. *Odredi ostatak pri dijeljenju polinoma* $p(x) = x^{2018} - 2x + 4$ *polinomom* $s(x) = x - 1$.

Prvo rješenje:
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, ostatak je polinom najviše stupnja nula, tj. konstantni polinom $r(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Neka je q kvocijent. Slijedi:

$$x^{2018} - 2x + 4 = (x - 1)\, q(x) + a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavajući u gornju jednadžbu $x = 1$ dobivamo

$$1^{2018} - 2 + 4 = (1 - 1)\, q(1) + a,$$
$$3 = 0 \cdot q(1) + a,$$

tj. $a = 3$. Dakle, $r(x) = 3$.

Drugo rješenje:
Zadatak ćemo sada riješiti koristeći Bezoutov teorem. Prema njemu odmah znamo da će ostatak pri djeljenju polinoma $p(x) = x^{2018} - 2x + 4$ polinomom $s(x) = x - 1$ biti upravo $p(1) = 1^{2018} - 2 \cdot 1 + 4 = 3$.

Dakle, vidimo da koristeći Bezoutov teorem možemo brzo i elegantno riješiti takve tipove zadataka.

Primjer 2.2.7. *Odredi koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da je polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ djeljiv polinomom $f_1(x) = x + 2$, a pri dijeljenju polinomom $f_2(x) = x^2 - 1$ daje ostatak $r(x) = 2x + 3$.*

Rješenje:
Budući da je polinom p djeljiv polinomom f_1, ostatak pri dijeljenju polinoma p polinomom f_1 je jednak 0. Prema Bezoutovom teoremu slijedi

$$p(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0. \tag{2.6}$$

Sada podijelimo polinom p polinomom f_2

$$\begin{array}{l}
\ \ (x^3 + ax^2 + bx + \quad c) : (x^2 - 1) = x + a \\
-\underline{(x^3 \qquad\quad - x)} \\
\qquad ax^2 + (b+1)x + c \\
\quad\ -\underline{(ax^2 \qquad\qquad - a)} \\
\qquad\qquad (b+1)x + \ a + c
\end{array}$$

Sada iz uvjeta zadatka slijedi

$$x(b + 1) + a + c = 2x + 3. \tag{2.7}$$

Sada iz (2.7) i teorema o jednakosti polinoma slijedi

$$\begin{aligned} b + 1 &= 2 \\ a + c &= 3 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a &= 3 - c. \end{aligned}$$

Uvrštavajući prethodno u (2.6) dobivamo

$$\begin{aligned} -8 + 4(3 - c) - 2 + c &= 0 \\ c &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sada, budući da je $a = 3 - c$, slijedi $a = \frac{7}{3}$.

Dakle, $p(x) = x^3 + \dfrac{7}{3}x^2 + x + \dfrac{2}{3}$.

Poglavlje 3

Nultočke i faktorizacija polinoma

Prisjetimo se da smo polinome definirali kao realne funkcije. Sada ćemo taj pojam proširiti i pod polinomom podrazumijevati preslikavanja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana formulom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi. Skup svih takvih polinoma zovemo prsten polinoma s kompleksnim koeficijentima i označavamo s $\mathbb{C}[x]$. Sve što smo u poglavlju 1. i 2. rekli da vrijedi za polinome iz $\mathbb{R}[x]$ vrijedi i za polinome iz $\mathbb{C}[x]$.

3.1 Nultočke polinoma

Definicija 3.1.1. *Broj x_1 za koji vrijedi $p(x_1) = 0$ naziva se nultočka ili korijen polinoma $p \in \mathbb{C}[x]$. Ako je x_1 realan broj, onda x_1 zovemo realnom nultočkom polinoma p, a ako je kompleksan, onda ga zovemo kompleksnom nultočkom polinoma p.*

Teorem 3.1.2. *Broj $x_1 \in \mathbb{C}$ je nultočka polinoma $p \in \mathbb{C}$ ako i samo ako je polinom p djeljiv polinomom $s(x) = x - x_1$, $s \in C[x]$.*

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju: Ako je polinom p djeljiv polinomom $s(x) = x - x_1$ onda je broj x_1 nultočka polinoma p.
Neka je polinom p djeljiv polinomom $s(x) = x - x_1$. Tada, prema definiciji 2.1.1. postoji polinom q takav da je $p(x) = (x - x_1)q(x)$. Kako je ta jednakost istinita za svaki $x \in \mathbb{C}$ onda ona mora biti istinita za $x = x_1$. Uvrštavanjem $x = x_1$ dobivamo $p(x_1) = 0$ te zaključujemo da je x_1 nultočka polinoma p.
Preostaje dokazati sljedeću tvrdnju: Ako je broj x_1 je nultočka polinoma p onda je polinom p djeljiv polinomom $s(x) = x - x_1$.

Prema Bézoutovom teoremu ostatak pri dijeljenju polinoma p sa $x - x_1$ je jednak $p(x_1)$. Budući da je x_1 je nultočka polinoma p onda vrijedi $p(x_1) = 0$. Dakle, ostatak je jednak 0. Zaključujemo da postoji polinom q takav da je $p(x) = (x - x_1)q(x)$ tj. polinom p djeljiv je polinomom $s(x) = x - x_1$.

□

Definicija 3.1.3. *Neka je $p \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$. Kažemo da je x_1 nultočka kratnosti $k \in \mathbb{N}$ polinoma p ako je on djeljiv polinomom $g(x) = (x - x_1)^k$, a nije djeljiv polinomom $h(x) = (x - x_1)^{k+1}$.*

3.2 Faktorizacija polinoma

Teorem 3.2.1. *(Osnovni teorem algebre) Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ ima barem jednu nultočku u skupu kompleksnih brojeva.*

Osnovni teorem algebre može se dokazati na više načina, npr. pomoću kompaktnosti ili koristeći svojstva kompleksne analize (prema [9]). Za svaki način dokazivanja je potrebno znanje visokoškolske matematike te primjena definicija i teorema koji izlaze iz okvira teme ovog diplomskog rada te ga zbog toga nećemo navoditi.

Važna posljedica osnovnog teorema algebre:

Teorem 3.2.2. *Neka je polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ n-tog stupnja. Tada postoje jedinstveni različiti $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ i $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r},$$

pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Dokaz. Promatrajmo polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, pri čemu su a_0, a_1, ..., a_n kompleksni brojevi, $n \geq 1$.

Prema osnovnom teoremu algebre, polinom p ima barem jednu nultočku x_1. Prema Teoremu 3.1.2. p je djeljiv polinomom $s(x) = x - x_1$, tj. postoji polinom q_1 takav da vrijedi:

$$p(x) = (x - x_1)q_1(x).$$

Budući da je p polinom stupnja n, a $s(x) = x - x_1$ polinom prvog stupnja prema Teoremu 1.3.3. q_1 je polinom stupnja $n - 1$. Ako $n - 1 \geq 1$, onda možemo zaključiti, opet prema osnovnom teoremu algebre, da polinom p_1 ima barem jednu nultočku. Označimo ju s x_2.

Prema Teoremu 3.1.2. postoji polinom q_2 takav da vrijedi $q_1(x) = (x - x_2)q_2(x)$, pri čemu je q_2 stupnja $n - 2$. Uvrstimo li q_1 u prethodnu jednakost dobivamo:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_2(x).$$

Budući da je p polinom stupnja n, postupak možemo ponoviti n puta sve dok ne dođemo do polinoma q_n koji je nultog stupnja, tj. $q_n(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{C}$. Tada je

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Primijetimo da polinom $p(x)$ ima vodeći koeficijent a_n, a polinom s desne strane jednakosti ima vodeći koeficijent c. Prema teoremu o jednakosti polinoma slijedi da je $c = a_n$. Dakle, slijedi

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{3.1}$$

Time je postojanje rastava dokazano.

Grupiranjem istih faktora dobivamo:

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_r)^{k_r}.$$

pri čemu su $x_1, \dots, x_r$ su međusobno različiti i $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Dokazat ćemo da je svaki od brojeva $k_i, i = 1, \dots, r$ jednak kratnosti nultočke x_i. Promotrimo specijalni slučaj $i = 1$. Prema definiciji 3.1.3 x_1 je nultočka kratnosti $k_1 \in \mathbb{N}$ polinoma ako je on djeljiv polinomom $(x - x_1)^{k_1}$, a nije djeljiv polinomom $(x - x_1)^{k_1+1}$. Primijetimo da je polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ djeljiv s $(x - x_1)^{k_1}$.
Pretpostavimo da je djeljiv i sa $(x - x_1)^{k_1+1}$. Tada postoji polinom g sa svojstvom

$$p(x) = g(x)(x - x_1)^{k_1+1},$$

pa je

$$a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_n)^{k_n} = g(x)(x - x_1)^{k_1+1},$$

to jest

$$a_n(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_n)^{k_n} = g(x)(x - x_1), \quad \forall x \neq x_1. \tag{3.2}$$

Budući da je p polinom stupnja n, zaključujemo da je g polinom stupnja $n - (k_1 + 1)$. Dakle, u (3.2) su na obje strane jednakosti polinomi stupnja $n - k_1$. Neka je

$$h(x) = a_n(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_n)^{k_n} - g(x)(x - x_1). \tag{3.3}$$

Primijetimo da je h polinom stupnja najviše $n-k_1$ jer su $a_n(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n}$ i $g(x)(x-x_1)$ polinomi stupnja $n - k_1$. Nultočke polinoma h su svi $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$. Kako polinom h ima više nultočaka nego što je njegov stupanj, zaključujemo da je h nulpolinom. Dakle, vrijediti će

$$a_n(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_n)^{k_n} = g(x)(x - x_1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sada posebno za $x = x_1$ dobivamo

$$a_n(x_1 - x_2)^{k_2} \cdots (x_1 - x_n)^{k_n} = 0.$$

Da bi gornja jednakost bila jednaka 0, mora biti $x_1 = x_j$ za neki $j \neq 1$, što je u kontradikciji s time da su svi $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ međusobno različiti. Lako se pokaže da će to vrijediti i općenito. Dakle, polinom p je djeljiv polinomom $(x - x_i)^{k_i}$, a nije djeljiv $(x - x_i)^{k_i+1}$, pa je k_i kratnost nultočke x_i za $i = 1, \ldots, r$.

Slijedi dokaz jedinstvenosti.
Pretpostavimo suprotno, tj. da osim prikaza (3.1) postoji i sljedeći:

$$p(x) = a_n(x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_n). \tag{3.4}$$

Sada mora vrijediti:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = a_n(x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_n). \tag{3.5}$$

Kada bi neka nultočka $x_i, i = 1, \ldots, n$ bila različita od svih $y_j, j = 1, \ldots, n$, onda bi za $x = x_1$ lijeva strana bila jednaka nuli, a desna različita od nule. Zaključujemo da svaki x_i mora biti jednak nekom y_j, i obratno.

Još preostaje pokazati sljedeće: ako je x_i nultočka od (3.1) kratnosti k, onda je i pripadni y_j nultočka polinoma (3.4) kratnosti k.
Pretpostavimo suprotno, tj. x_i je nultočka od (3.1) kratnosti k, a pripadni y_j nultočka polinoma (3.4) kratnosti p. Neka je $k > p$. Kada bismo podijelili (3.5) sa $(x - x_i)^p$ dobili bismo jednakost u kojoj je lijeva strana jednakosti djeljiva sa $x - x_i$, a desna nije. Dakle, dolazimo do kontradikcije. Analogno vidimo da će i pretpostavka $k < p$ voditi kontradikciji.
Prema tome $k = p$ i jednoznačnost rastava je dokazana.

□

Dakle, svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka x_1, x_2, ..., x_n, od kojih neke mogu biti i jednake. Polinom možemo faktorizirati na način:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

3.3 Vièteove formule

Teorem 3.3.1. *Neka je dan polinom* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, $p \in \mathbb{C}[x]$ *i neka su* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *njegove nultočke. Tada vrijede Vièteove*[1] *formule*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

[1]François Viète (1540.-1603.) - francuski matematičar

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_k = x_1x_2\cdots x_k + \cdots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\cdots x_n = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom.
Dokažimo da tvrdnja vrijedi za polinom stupnja $n = 1$. Neka je p polinom prvog stupnja oblika $p(x) = a_1x + a_0$ i neka je x_1 njegova nultočka. Tada je $\sigma_1 = x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da Vièteove formule vrijede za svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \in \mathbb{N}$ oblika

$$f(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$$

takav da su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ njegove nultočke, tj. da vrijedi sljedeće

$$\sigma_1 = -\frac{b_{n-1}}{b_n}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_k = (-1)^k\frac{b_{n-k}}{b_n}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = (-1)^n\frac{b_0}{b_n}.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n + 1$

$$p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0.$$

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ nultočke polinoma p. Prema osnovnom teoremu algebre polinom p ima barem jednu nultočku x_{n+1}. Sada je prema Teoremu 3.1.2. polinom p djeljiv s $x - x_{n+1}$, tj. postoje $b_0, b_1, \ldots, b_n$ takvi da vrijedi

$$p(x) = (x - x_{n+1})(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

odnosno

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_{n+1})(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0). \tag{3.6}$$

Primijenjujući teorem o jednakosti polinoma iz (3.6) slijedi:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= b_n \\
a_n &= b_{n-1} - b_n x_{n+1} \\
&\vdots \\
a_{n-k+1} &= b_{n-k} - b_{n-k+1}x_{n+1} \\
&\vdots \\
a_1 &= b_0 - b_1 x_{n+1} \\
a_0 &= -b_0 x_{n+1},
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
b_n &= a_{n+1} \\
b_{n-1} &= a_n + b_n x_{n+1} \\
&\vdots \\
b_{n-k} &= a_{n-k+1} + b_{n-k+1}x_{n+1} \\
&\vdots \\
b_0 &= -\frac{a_0}{x_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Iz prethodno dobivenih jednakosti i iz pretpostavke indukcije slijedi

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = \sigma_1 + x_{n+1} = -\frac{b_{n-1}}{b_n} + x_{n+1} = -\frac{a_n + a_{n+1}x_{n+1}}{a_{n+1}} + x_{n+1} = -\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
x_1x_2\cdots x_k + x_{n-k+1}\cdots x_n + x_1\cdots x_{k-1}x_{n+1} + \cdots + x_{n-k+2}\cdots x_nx_{n+1} =& \\
&= \sigma_k + x_{n+1}\sigma_{k-1} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{b_{n-k}}{b_n} + (-1)^k\frac{b_{n-k+1}}{b_n}x_{n+1} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(a_{n-k+1} + b_{n-k+1}x_{n+1}) + (-1)^k x_{n+1}b_{n-k+1}}{b_n} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{a_{n-k+1}}{a_{n+1}}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$x_1\cdots x_{n+1} = \sigma_n x_{n+1} = (-1)^n\frac{b_0}{b_n}x_{n+1} = (-1)^n\frac{\frac{-a_0}{x_{n+1}}}{a_{n+1}}x_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{a_0}{a_{n+1}}.$$

Time smo dokazali da Vièteove formule vrijede i za polinome stupnja $n+1$, pa po principu matematičke indukcije Vièteove formule vrijede za polinome bilo kojeg stupnja.

□

3.4 Svojstva nultočaka polinoma

Kod polinoma iz $\mathbb{Z}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$ postoje teoremi koji nam pomažu kod određivanja cjelobrojnih i racionalnih nultočaka. Uočimo da se polinomi s racionalnim koeficijentima mogu množenjem s zajedničkim nazivnikom svesti na polinome s cjelobrojnim koeficijentima. Dakle, dovoljno je proučiti polinome iz $\mathbb{Z}[x]$.

Cjelobrojne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima

Sljedeći teorem će nam pomoći pri određivanju cjelobrojnih nultočaka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima ukoliko one postoje.

Teorem 3.4.1. *Neka je $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $a_0 \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}[x]$. Ako je x_1 nultočka tog polinoma i $x_1 \neq 0$ cijeli broj, onda je x_1 djelitelj slobodnog člana polinoma p.*

Dokaz. Neka je $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \neq 0$, nultočka polinoma $p(x)$. Tada vrijedi:

$$p(x_1) = a_nx_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1x_1 + a_0 = 0.$$

Iz gornje jednakosti slijedi:

$$a_0 = -x_1(a_nx_1^{n-1} + a_{n-1}x_1^{n-2} + \ldots + a_1),$$

odnosno

$$\frac{a_0}{x_1} = -(a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \ldots + a_1).$$

Kako su koeficijenti $a_1, \ldots, a_n$ i nultočka x_1 cijeli brojevi, onda je izraz na desnoj strani jednakosti u zagradi također cijeli broj. Iz toga slijedi da i $\frac{a_0}{x_1}$ mora biti cijeli broj, tj. x_1 je djelitelj od a_0. □

Racionalne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima

Pokazat ćemo kako odrediti racionalne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

Teorem 3.4.2. *Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $p \in \mathbb{Z}[x]$. Ako je racionalni broj $x_1 = \frac{k}{l}$ (gdje su $k,l \in \mathbb{Z}$ relativno prosti brojevi, $l \neq 0$) nultočka polinoma p, onda je slobodni član (a_0) djeljiv s k, a vodeći koeficijent (a_n) s l.*

Dokaz. Neka je $x_1 = \frac{k}{l}$ nultočka polinoma p. Tada vrijedi:

$$p\left(\frac{k}{l}\right) = a_n \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^{n-1} + ... + a_1 \cdot \left(\frac{k}{l}\right) + a_0 = 0.$$

Pomnožimo jednadžbu s l^n i dobivamo jednadžbu ekvivalentnu prethodnoj

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} l + ... + a_1 k l^{n-1} + a_0 l^n = 0, \tag{3.7}$$

iz koje slijedi

$$a_0 l^n = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} l + ... + a_1 l^{n-1}). \tag{3.8}$$

Ako je $k = 0$, $x_1 = 0$ je nultočka polinoma p. Budući da je $l \neq 0$, iz (3.8) slijedi da je $a_0 = 0$.

Ako je $k \neq 0$ dijelimo (3.8) s k i dobivamo

$$\frac{a_0 l^n}{k} = -(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} l + ... + a_1 l^{n-1}). \tag{3.9}$$

Kako su koeficijenti $a_1, \ldots, a_n$ i k, l cijeli brojevi, onda je izraz na desnoj strani jednakosti (3.9) također cijeli broj. Iz toga slijedi da je i $\frac{a_0 l^n}{k}$ također cijeli broj. Budući da su k i l relativno prosti brojevi, zaključujemo da je k djelitelj od a_0. Primijetimo da iz (3.7) također slijedi

$$a_n k^n = -l(a_{n-1} k^{n-1} + ... + a_1 k l^{n-2} + a_0 l^{n-1})$$

te analogno zaključujemo da je l djelitelj od a_n. □

Slijedi važno svojstvo kompleksnih nultočaka polinoma iz $\mathbb{R}[x]$.

Kompleksne nultočke polinoma s realnim koeficijentima

Teorem 3.4.3. *Neka je* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$*,* $p \in \mathbb{R}[x]$*. Ako je* $x_0 = a + bi$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $b \neq 0$ *nultočka polinoma* p*, onda je* $\overline{x_0} = a - bi$ *također nultočka tog polinoma.*

Dokaz. Neka je $s(x) = (x - x_0)(x - \overline{x_0})$. Tada je $s \in \mathbb{R}[x]$ jer

$$\begin{aligned} s(x) &= (x - x_0)(x - \overline{x_0}) = x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0\overline{x_0} = x^2 - (a + bi + a - bi)x + (a + bi)(a - bi) \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Budući da su $a, b \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je polinom s polinom s realnim koeficijentima, tj. $s \in \mathbb{R}[x]$.

Podijelimo li polinom p polinomom s, prema teoremu o dijeljenju s ostatkom dobivamo:

$$p(x) = (x - x_0)(x - \overline{x_0})q(x) + r(x), \text{ gdje je } \deg r < \deg s.$$

Budući da su p i s polinomi s realnim koeficijentima slijedi da su i q i r polinomi s realnim koeficijentima. Znamo da je $\deg s = 2$ pa zaključujemo da je $\deg r \leq 1$. Neka je $r(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Sada za svaki $x \in \mathbb{C}$ mora vrijediti:

$$p(x) = (x - x_0)(x - \overline{x_0})q(x) + Ax + B.$$

Budući da gornja jednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{C}$ onda mora vrijediti i za $x = x_0$:

$$p(x_0) = Ax_0 + B.$$

Budući da je x_0 nultočka od p slijedi da je $Ax_0 + B = 0$, odnosno $A(a + bi) + B = 0$, tj.

$$Aa + B + Abi = 0. \tag{3.10}$$

Kako su A i B realni brojevi, da bi vrijedila jednakost (3.10), trebaju i realni i imaginarni dio biti jednaki nuli:

$$Aa + B = 0$$
$$Ab = 0.$$

Znamo da je $b \neq 0$ pa zaključujemo da je $A = 0$ iz čega slijedi da je i $B = 0$. Dakle, $r(x) = 0$ i vrijedi

$$p(x) = (x - x_0)(x - \overline{x_0})\, q(x), \tag{3.11}$$

iz čega slijedi

$$p(\overline{x_0}) = 0.$$

Dakle, $\overline{x_0}$ je nultočka polinoma p.

□

3.5 Najveća zajednička mjera dvaju polinoma

Definicija 3.5.1. *Polinom h zovemo zajednička mjera polinoma p i s, $p,\ s \in \mathbb{R}[x]$, $p, s \neq 0$, ako su p i s djeljivi s h.*

Definicija 3.5.2. *Polinom d zovemo najveća zajednička mjera polinoma p i s, $p,\ s \in \mathbb{R}[x]$, $p, s \neq 0$, ako je d djeljiv svakom zajedničkom mjerom od p i s. Najveću normiranu zajedničku mjeru polinoma p i s označavamo s $M(p, s)$.*

Teorem 3.5.3. *(O najvećoj zajedničkoj mjeri)*
Za svaka dva polinoma p i s, $p,\ s \in \mathbb{R}[x]$, $p, s \neq 0$, postoji jedinstveni normirani polinom koji je najveća zajednička mjera polinoma p i s.

Dokaz. Najprije ćemo dokazati jedinstvenost.
Pretpostavimo da su r_1 i r_2 dvije najveće normirane zajedničke mjere polinoma p i s. Prema definiciji 3.5.2. r_1 je djeljiv sa r_2 i r_2 je djeljiv s r_1. Dakle, postoje polinomi q_1 i q_2 takvi da je

$$r_1 = r_2 q_2, \quad r_2 = r_1 q_1. \tag{3.12}$$

Iz prethodnih jednakosti prema Teoremu 1.3.5. slijedi $\deg r_1 \leq \deg r_2$ i $\deg r_2 \leq \deg r_1$, pa je $\deg r_1 = \deg r_2$. Ovo i (3.12) povlači da su q_1 i q_2 konstante, a kako su r_1 i r_2 normirani polinomi slijedi $r_1 = r_2$ i $q_1 = q_2$ čime smo dokazali jedinstvenost.
Preostaje dokazati egzistenciju.
Neka je $\deg p \geq \deg s$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje i jednoznačno su određeni polinomi q_1 i r_1 takvi da je

$$p = sq_1 + r_1, \ \ \deg r_1 < \deg s.$$

Primijenimo teorem o dijeljenju s ostatkom na polinome s i r_1. Dakle, postoje jedinstveni polinomi q_2 i r_2 takvi da je

$$s = r_1 q_2 + r_2, \ \ \deg r_2 < \deg r_1.$$

Postupak nastavimo za polinome r_1 i r_2, pa postoje polinomi q_3 i r_3 takvi da je

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \ \ \deg r_3 < \deg r_2.$$

Nastavljajući postupak, dolazimo do niza ostataka $r_1, r_2, r_3, \ldots$ čiji stupnjevi strogo padaju, pa stoga moramo doći do ostatka $r_k \neq 0$ takvog da je u jednakosti

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1},$$

ostatak $r_{k+1} = 0$.
Dakle, imamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned} p &= sq_1 + r_1 \\ s &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-3} &= r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1} \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Iz posljednje jednakosti u (3.13) vidimo da r_k dijeli r_{k-1}. Budući da r_k dijeli r_{k-1} pretposljednju jednakost u (3.13) možemo zapisati kao $r_{k-2} = r_k(q_{k+1}q_k + 1)$, iz čega zaključujemo da r_k dijeli r_{k-2}. Sada iz

$$\begin{aligned} r_{k-3} &= r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1} \\ &= r_k(q_{k+1}q_k + 1)q_{k-1} + r_k q_{k+1} \\ &= r_k \left((q_{k+1}q_k + 1)q_{k-1} + q_{k+1}\right) \end{aligned}$$

vidimo da r_k dijeli r_{k-3}. Analogno dalje r_k dijeli r_3 i r_2 pa iz treće jednakosti u (3.13) slijedi da r_k dijeli r_1, iz druge jednakosti da r_k dijeli s, a iz prve da r_k dijeli p.
Dakle, zaključujemo da je r_k mjera od p i s. Preostaje dokazati da je r_k najveća zajednička mjera od p i s. Pretpostavimo da je polinom d neka druga mjera od p i s. Treba pokazati da d dijeli r_k. Prema definiciji 3.5.1. d dijeli p i s. Iz prve jednakosti u (3.13) slijedi

$$r_1 = p - sq_1,$$

kako d dijeli p i s zaključujemo da d dijeli r_1. Na isti način iz druge jednakosti iz (3.13) slijedi

$$r_2 = s - r_1 q_2,$$

kako d dijeli s i r_1 zaključujemo da d dijeli r_2. Nastavljajući postupak zaključujemo da d dijeli i r_k. Dakle, r_k je najveća zajednička mjera od p i s. □

Uzastopnu primjenu teorema o dijeljenju s ostatkom, kojom smo se služili dokazujući Teorem 3.5.3., zovemo Euklidov[2] algoritam. Koristit ćemo ga za nalaženje najveće zajedničke mjere dvaju polinoma.

[2]Euklid (oko 300. god. pr. n. e.) - grčki matematičar

3.6 Obrada cjeline na dodatnoj nastavi

S učenicima prvo proširujemo pojam polinoma definirajući ih kao kompleksne funkcije te napominjemo da će za njih vrijediti sve što smo rekli da vrijedi za polinome iz $\mathbb{R}[x]$.

Nultočke i faktorizacija polinoma

Učenici su se s pojmom nultočke prvi puta susreli u 7. razredu osnovne škole pri obradi linearne funkcije. Također su na redovnoj nastavi u 2. razredu srednje škole određivali nultočke kvadratne funkcije.

Dakle, kao motivacijski primjer učenicima možemo zadati da odrede nultočke neke linearne i kvadratne funkcije. Povezujući linearnu i kvadatnu funkciju s polinomom prvog i drugog stupnja došli bi do općenite definicije nultočke polinoma (Definicija 3.1.1) te teorema (Teorem 3.1.2) pomoću kojeg provjeravamo je li neki broj nultočka zadanog polinoma. S učenicima je moguće provesti i dokaz navedenog teroema.

Slijedi rasprava o tome ima li svaki polinom nultočku.
Ako nultočke tražimo samo u skupu realnih brojeva, odgovor će biti negativan. Na primjer polinom $p(x) = x^2 + 2$ nema realnih nultočaka. Međutim, ako proširimo potragu na skup kompleksnih brojeva, lako vidimo da su brojevi $i\sqrt{2}$ i $-i\sqrt{2}$ njegove kompleksne nultočke. Konačno, odgovor na postavljeno pitanje dat će nam osnovni teorem algebre (Teorem 3.2.1) prema kojem svaki polinom ima barem jednu nultočku u skupu kompleksnih brojeva.
Nakon definicije kratnosti nultočke (Definicija 3.1.3) slijedi teorem koji govori da svaki polinom možemo faktorizirati, tj. da svaki polinom n-tog stupnja možemo na jedinstven način prikazati u obliku umnoška n linearnih faktora (Teorem 3.2.2). Dokaz navedenog teorema nije potrebno provoditi na dodatnoj nastavi.

Slijedi rješavanje nekoliko tipičnih primjera da bi se gradivo čim bolje usvojilo.

Primjer 3.6.1. *Odredi nultočke polinoma $p(x) = x^4 - 1$.*

Rješenje:
Nultočke polinoma ćemo odrediti faktorizacijom polinoma. Pozivajući se na formulu za razliku kvadrata znamo da vrijedi:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

Primijetimo da su $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ dvije realne, a $x_3 = i$ i $x_4 = -i$ dvije kompleksne nultočke polinoma p.

Primjer 3.6.2. *Znajući da je broj $x_1 = -1$ jedna nultočka polinoma $p(x) = x^3 - 3x - 2$, odredi njegove ostale nultočke.*

Rješenje:
Zaista, $p(-1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$.
Prema Teoremu 3.1.2. znamo ako je $x_1 = -1$ nultočka polinoma p da je onda taj polinom djeljiv polinomom $q(x) = x - (-1) = x + 1$. Dakle, po definiciji djeljivosti, postoji polinom $s(x)$ takav da vrijedi $p(x) = (x + 1)s(x)$.

Podijelimo polinom $p(x) = x^3 - 3x - 2$ polinomom $q(x) = x + 1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 \quad\quad - 3x - 2) : (x + 1) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad\quad -x^2 - 3x - 2 \\
\quad \underline{-(-x^2 - x)} \\
\quad\quad\quad -2x - 2 \\
\quad\quad\quad \underline{-(2x - 2)} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Dakle, kvocijent polinoma p i q je polinom $s(x) = x^2 - x - 2$.
Faktorizacijom polinoma s dobivamo

$$s(x) = x^2 - x - 2 = x^2 + x - 2x - 2 = x(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 2).$$

To znači da su preostale dvije nultočke $x = -1$ i $x = 2$.
Zaključujemo da polinom p možemo zapisati kao

$$p(x) = (x + 1)s(x) = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Primijetimo da je gornji zapis upravo faktorizacija polinoma p. Sada zaključujemo da su njegove nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$, pri čemu je $x_1 = -1$ dvostruka nultočka.

Primjer 3.6.3. *Rastavi polinom $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ na linearne faktore i odredi kratnost njegovih nultočaka.*

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 \\
&= x^4\,(x - 1) - 2x^2\,(x - 1) + (x - 1) \\
&= (x - 1)\,(x^4 - 2x^2 + 1) \\
&= (x - 1)\,(x^2 - 1)^2 \\
&= (x - 1)\,(x - 1)^2\,(x + 1)^2 \\
&= (x - 1)^3\,(x + 1)^2.
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da su nultočke polinoma $x_1 = 1$ kratnosti 3, i $x_2 = -1$ kratnosti 2.

Vièteove formule

Na dodatnoj nastavi je korisno napraviti izvod Vièteovih formula za polinome trećeg stupnja.

Neka je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ po volji odabran polinom trećeg stupnja. On ima tri nultočke u skupu kompleksnih brojeva koje označimo s x_1, x_2, i x_3 te ga možemo napisati i na sljedeći način:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Kada pomnožimo i uredimo članove s desne strane dobivamo:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - ax_1x_2x_3.$$

Po teoremu o jednakosti polinoma slijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Dobili smo Vièteove formule za polinom trećeg stupnja. Sličan izvod učenici mogu napraviti i za polinome 4. ili 5. stupnja.

Primjer 3.6.4. *Ako su x_1, x_2, x_3 nultočke polinoma $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$, kolika je vrijednost izraza $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$?*

Rješenje:
Primijetimo da je:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}.$$

Primjenjujući Vièteove formule za polinom trećeg stupnja dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{5}{2}, \\ x_1x_2x_3 &= -\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Sada slijedi:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}.$$

Dakle, vrijednost danog izraza je $\frac{5}{3}$.

Svojstva nultočaka polinoma

Na dodatnoj nastavi je korisno proći sve teoreme i dokaze iz cjeline 3.4. te svaki potkrijepiti odgovarajućim primjerom.

Primjer 3.6.5. *Odredi nultočke polinoma* $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$

Rješenje:
Primjenjujući teorem 3.4.1, provjerit ćemo ima li polinom $p(x)$ cjelobrojne nultočke. Slobodni član jednak je 2. Prema teoremu 3.4.1, ako polinom $p(x)$ ima cjelobrojnu nultočku, onda ona mora biti djelitelj slobodnog člana, tj. broja 2. Djelitelji slobodnog člana, tj. kandidati za cjelobrojne nultočke, su $1, -1, 2, -2$. Odredimo $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$ i $p(-2)$. Slijedi:

$$p(1) = 2 - 3 - 3 + 2 = -2$$

$$p(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$$

$$p(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$$

$$p(-2) = -16 - 12 + 6 + 2 = -20.$$

Dakle, $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ su nultočke polinoma $p(x)$. Sada ćemo lako naći njegove preostale nultočke.
Budući da je $p(-1) = 0$ i $p(2) = 0$, tj. $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ su nultočke od p, taj je polinom, prema teoremu 3.1.2. djeljiv s $q_1(x) = x + 1$ i $q_2(x) = x - 2$. Ako je djeljiv polinomima q_1 i q_2 onda je djeljiv njihovim umnoškom.
Podijelimo polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ polinomom $q_1 \cdot q_2 = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2) : (x^2 - x - 2) = 2x - 1. \\
\underline{-(2x^3 - 2x^2 - 4x)} \\
\qquad\quad -x^2 + \quad x + 2 \\
\qquad\ \underline{-(-x^2 + \quad x + 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Dobili smo ostatak 0. Dakle, polinom p je djeljiv umnoškom polinoma q_1 i q_2. Rezultat tog dijeljenja je $2x - 1$ zato polinom p možemo faktorizirati na sljedeći način:

$$p(x) = (2x - 1)(x + 1)(x - 2) = 2\Big(x - \frac{1}{2}\Big)(x + 1)(x - 2).$$

Zaključujemo da su nultočke polinoma $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Budući da polinom trećeg stupnja ima najviše tri nultočke, zaključujemo da drugih nultočaka nema.

Primjer 3.6.6. *Odredi sve racionalne nultočke polinoma* $p(x) = 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1$.

Rješenje:
Prema Teoremu 3.4.2 kandidati za racionalne nultočke su racionalni brojevi oblika $x_1 = \frac{k}{l}$, pri čemu k mora biti djelitelj slobodnog člana, tj. broja -1, a l djelitelj vodećeg koeficijenta, tj. broja 6. Dakle, kandidati za nultočke su

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}.$$

Sada ćemo provjeriti je li neki od njih zaista nultočka polinoma p. Vrijedi:

$$p\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0,$$

$$p\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4},$$

$$p\Big(-\frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{27} - \frac{1}{27} + \frac{5}{9} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{20}{27},$$

$$p\Big(\frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{27} + \frac{1}{27} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} - 1 = 0,$$

$$p\Big(-\frac{1}{6}\Big) = \frac{1}{216} - \frac{1}{216} + \frac{5}{36} - \frac{1}{6} - 1 = -\frac{37}{36},$$

$$p\Big(\frac{1}{6}\Big) = \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} - 1 = -\frac{37}{54}.$$

Dakle, zaključujemo da su jedine racionalne nultočke polinoma p brojevi $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$.
Preostale dvije nultočke bismo mogli dobiti tako da polinom p podijelimo s $\big(x+\frac{1}{2}\big)\big(x-\frac{1}{3}\big)$, odnosno s $(2x + 1)(3x - 1)$. Time bismo dobili polinom drugog stupnja i odredili rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

Primjer 3.6.7. *Broj* $x_1 = 2+i$ *je jedna nultočka polinoma* $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15$. *Odredi ostale nultočke polinoma* p.

Rješenje:
Prvo se provjerom uvjerimo da je $x_1 = 2 + i$ zaista nultočka polinoma p.
Prema Teoremu 3.4.3 je i $x_2 = 2 - i$ nultočka polinoma p. Sada je prema Teoremu 3.1.2. polinom p djeljiv s $x - (2 + i)$ i $x - (2 - i)$ pa je posebno djeljiv i s njihovim umnoškom, tj. sa

$$[x - (2 + i)]\,[x - (2 - i)] = x^2 - 4x + 5.$$

Podijelimo polinom p s dobivenim umnoškom

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15) : (x^2 - 4x + 5) = x^2 - 3 \\
\underline{-(x^4 - 4x^3 + 5x^2)} \\
\qquad\qquad -3x^2 + 12x - 15 \\
\qquad\qquad \underline{-(-3x^2 + 12x - 15)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Budući da smo dijeljenjem dobili ostatak 0, uvjerili smo se da je $2 + i$ zaista nultočka polinoma p.
Preostale dvije nultočke ćemo naći kao rješenja jednadžbe $x^2 - 3 = 0$, tj.

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{3}.$$

Najveća zajednička mjera dvaju polinoma

Prije upoznavanja s najvećom zajedničkom mjerom dvaju polinoma učenike je korisno podsjetiti na to kako se određuje najveći zajednički djelitelj dvaju cijelih brojeva.

Primjer 3.6.8. *Odredi najveći zajednički djelitelj brojeva* 350 *i* 210.

Rješenje:
Učenici su se do sada susreli s dva načina određivanja najvećeg zajedničkog djelitelja. Prvi je pomoću određivanja zajedničkih prostih faktora, a drugi je primjenom Euklidovog algoritma. Korisno je ponoviti oba načina.
1. način:

$$
\begin{array}{r|l}
350, 210 & 2 \\
175, 105 & 5 \\
35, 21 & 7 \\
5, 3 &
\end{array}
$$

Dakle, najveći zajednički djelitelj brojeva 350 i 270 je $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
2. način:
Primijenjujući Euklidov algoritam slijedi
$350 = 1 \cdot 210 + 140$
$210 = 1 \cdot 140 + 70$
$140 = 2 \cdot 70$
Dakle, najveći zajednički djelitelj brojeva 350 i 210 je 70.

Nakon spomenutog motivacijskog primjera slijedi definicija zajedničke i najveće zajedničke mjere dvaju polinoma te rješavanje tipičnih primjera.

Primjer 3.6.9. *Odredi najveću zajedničku mjeru polinoma* $p(x) = x^2 - 1$ *i* $s(x) = x^2 - 3x + 2$.

Rješenje:
Odredimo li cjelobrojne nultočke polinoma p i s možemo dobiti njihove faktorizacije $p(x) = (x-1)(x+1)$ i $s(x) = (x-1)(x-2)$ iz čega lako vidimo da je najveća zajednička mjera polinoma p i s jednaka $d(x) = x - 1$.

Primijetimo da su u gornjem primjeru bili zadani polinomi drugog stupnja koje smo lako faktorizirali. Međutim, ako su zadani polinomi većeg stupnja nije ih lako fakotorizirati. Tada ćemo najveću zajedničku mjeru određivati na drugačiji način koristeći Euklidov algoritam za polinome.

Primjer 3.6.10. *Odredi najveću zajedničku mjeru polinoma* $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ *i* $s(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.

Rješenje:
Faktorizirani oblici polinoma p i s su $p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$ i $s(x) = (x-1)(x-2)(x+4)$ iz čega se lako vidi da je zajednička mjera polinoma p i s polinom $d(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$.

Međutim, ne možemo uvijek uspješno faktorizirati dane polinome. Zato želimo naći metodu određivanja najveće zajedničke mjere dvaju polinoma bez određivanja njihovih nultočaka.
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje polinomi q i r takvi da je $p = sq+r$, pri čemu je $\deg r < \deg s$. Polinome q i r ćemo dobiti tako da podijelimo polinom p polinomom s. Slijedi:

$$
\begin{array}{l}
\ \ (x^4 + x^3 - \ \ 7x^2 - x \qquad + 6) : (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) = x + 8 \\
\underline{-(x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x)} \\
\qquad 8x^3 - 21x^2 + 7x \quad + 6 \\
\quad \underline{-(8x^3 - 56x^2 + 112x - 64)} \\
\qquad\qquad 35x^2 - 105x + 70.
\end{array}
$$

Dakle,
$p(x) = (x+8)s(x) + r(x), \quad r(x) = 35x^2 - 105x + 70.$
Prema teoremu od dijeljenju s ostatkom postoje polinomi q_1 i r_1 takvi da je $s = rq_1 + r_1$, pri čemu je $\deg r_1 < \deg r$. Podijelimo sada polinom s sa r:

$$
\begin{array}{l}
\ \ (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (35x^2 - 105x + 70) = \frac{1}{35}x - \frac{4}{35} \\
\underline{-(x^3 - 3x^2 + 2x)} \\
\qquad -4x^2 + 12x - 8 \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 12x - 8)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Primijetimo da je ostatak pri dijeljenju polinoma s polinomom r jednak 0, tj. r dijeli s. Kako je $p = sq + r$ slijedi da je i p djeljiv s r. Zaključujemo da je polinom $r(x) = 35x^2 - 105x + 70$ najveća zajednička mjera polinoma p i s. Uzastopnu primjenu teorema o

dijeljenju s ostatkom uz pomoć koje određujemo najveću zajedničku mjeru dva polinoma nazivamo Euklidov algoritam.
Primijetimo da smo uz pomoć faktorizacije polinoma pokazali da je najveća zajednička mjera polinoma p i q jednaka $d(x) = x^2 - 3x + 2$. Međutim, koristeći Euklidov algoritam kao najveću zajedničku mjeru polinoma p i s dobili smo polinom

$$d(x) = 35x^2 - 105x + 70 = 35(x^2 - 3x + 2).$$

Uočavamo da zajednička mjera dvaju polinoma nije jedinstveno određena, tj. ako je d najveća zajednička mjera dvaju polinoma onda je to i ad, $a \in \mathbb{R}$. Stoga se dogovorom uzima da je najveća zajednička mjera normiran polinom. Dakle, najveća zajednička mjera polinoma p i s u navedenom primjeru je $d(x) = x^2 - 3x + 2$, tj. $M(p, s) = x^2 - 3x + 2$.

Primjer 3.6.11. *Odredi najveću zajedničku mjeru polinoma* $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ *i* $s(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Rješenje:
Primijetimo da u ovom primjeru polinom p ne znamo faktorizirati. Dakle, za određivanje najveće zajedničke mjere ćemo koristiti Euklidov algoritam.
Podijelimo polinom p sa s:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + 2x^2 + x \quad + 1) : (x^3 - 2x^2 + x - 2) = x + 3 \\
-\underline{(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x)} \\
\qquad\quad 3x^3 + x^2 \;\; + 3x \; + 1 \\
\qquad -\underline{(3x^3 - 6x^2 + 3x - 6)} \\
\qquad\qquad\quad 7x^2 + \qquad 7.
\end{array}$$

Dakle,
$p(x) = (x + 3)s(x) + r_1(x), \quad r_1 = 7x^2 + 7.$
Podijelimo sada s sa r_1:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (7x^2 + 7) = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7} \\
-\underline{(x^3 + \qquad\quad x)} \\
\qquad -2x^2 - \quad 2 \\
\quad -\underline{(2x^2 + \quad 2)} \\
\qquad\qquad\quad 0.
\end{array}$$

Dakle, $r_2(x) = 0$, pa je $r_1(x) = 7x^2 + 7$. Dakle, $M(p, s) = x^2 + 1$ je najveća zajednička mjera danih polinoma.

Poglavlje 4

Hornerov algoritam

Učenike je korisno upoznati s jednostavnim algoritmom pomoću kojeg će efikasnije i brže računati vrijednost polinoma u nekoj točki, dijeliti polinomom prvog stupnja i rastavljati polinom po potencijama.

4.1 Računanje vrijednosti polinoma u nekoj točki

Primjer 4.1.1. *Izračunaj vrijednost polinoma* $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ *za* $x = 2$.

Rješenje:
Cilj nam je zadatak riješiti na najbrži i najelegantniji način, tj. uz minimalan broj operacija. Zapisat ćemo polinom na sljedeći način:

$$p(x) = (x^2 - 3x + 2)x - 1 = ((x - 3)x + 2)x - 1$$

te ćemo za zadani x računati od unutarnje zagrade prema vanjskoj.
Dakle, za $x = 2$ računamo:
$x - 3 = 1 \cdot 2 - 3 = -1$
$(x - 3)x + 2 = -1 \cdot x + 2 = -1 \cdot 2 + 2 = 0$
$((x - 3)x + 2)x - 1 = 0 \cdot x - 1 = 0 \cdot 2 - 1 = -1$

Uočimo da svaki put radimo sličnu stvar, prethodni rezultat množimo s x i dodajemo određenu konstantu koja je zapravo koeficijent polinoma. Ovaj račun možemo elegantnije zapisati pomoću tablice.
U prvom retku napisani su koeficijenti polinoma, a u drugom vrijednost varijable x.

	1	−3	2	−1
2				

Prepišimo vrijednost vodećeg koeficijenta.

	1	−3	2	−1
2	1			

Pomnožimo vrijednost varijable $x = 2$ sa 1, tj. elementom drugog retka i tom umnošku dodajmo sljedeći broj iz prvog retka.

	1	−3	2	−1
2	1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$		

Ponavljajmo postupak:

	1	−3	2	−1
2	1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2 \cdot (-1) + 2 = 0$	$2 \cdot 0 + (-1) = -1$

Dobili smo konačnu tablicu. Rješenje, tj. vrijednost polinoma p za vrijednost argumenta $x = 2$ je $p(2) = -1$.

	1	−3	2	−1
2	1	−1	0	−1

Općenito, broj u drugom retku dobiva se tako da se prethodni broj u tom retku pomnoži sa zadanim argumentom i pribroji mu se broj iz prvog retka, desno iznad njega.

U nastavku ćemo ispitati vrijedi li navedeni postupak i općenito.

Zadan je polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, i zadan je $\alpha \in \mathbb{R}$.
Prema Bezoutovom teoremu ostatak pri dijeljenju polinoma p sa $x - \alpha$ je jednak $p(\alpha)$.
Dakle, polinom p možemo zapisati kao

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + p(\alpha), \tag{4.1}$$

pri čemu je $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.
Iz (4.1) sada slijedi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + p(\alpha)$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_m x^{m+1} + (b_{m-1} - \alpha b_m) x^m + \cdots + (b_0 - \alpha b_1) x + (p(\alpha) - \alpha b_0)$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma slijedi da je $m = n - 1$ i da je
$a_n = b_m \qquad \Rightarrow b_{n-1} = a_n$
$a_{n-1} = b_{m-1} - \alpha b_m \quad \Rightarrow b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}$

$$\vdots$$
$$\begin{aligned} a_1 &= b_0 - \alpha b_1 && \Rightarrow b_0 = \alpha b_1 + a_1 \\ a_0 &= p(\alpha) - \alpha b_0 && \Rightarrow p(\alpha) = \alpha b_0 + a_0. \end{aligned}$$

Odnosno, za polinom n-tog stupnja tablica računanja vrijednosti polinoma u točki $x = \alpha$ izgleda ovako:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$p(\alpha)$

Ovakav način računanja vrijednosti polinoma naziva se **Hornerov algoritam**.
Primijetimo da smo ovime pokazali da se Hornerov algoritam može primjenjivati i kod dijeljenja polinomom prvog stupnja. Dakle, dijeljenjem polinoma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomom prvog stupnja $x - \alpha$ dobit ćemo polinom čiji koeficijenti odgovaraju brojevima iz gornje tablice, tj. $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} \cdots + b_0$ i ostatak $p(\alpha)$.

4.2 Dijeljenje polinomom prvog stupnja

Kao što je u prethodnom poglavlju navedeno, Hornerov algoritam možemo koristiti i pri dijeljenju polinoma polinomom prvog stupnja.

Primjer 4.2.1. *Podijeli polinom $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ polinomom $x - 2$.*

Rješenje:
Zadatak ćemo prvo riješiti koristeći standardni algoritam za dijeljenje polinoma.

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) : (x - 2) = x^2 - x \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \qquad -x^2 + 2x - 1 \\ \quad \underline{-(-x^2 + 2x)} \\ \qquad\qquad\quad -1 \end{array}$$

Riješimo sada zadatak koristeći Hornerov algoritam.

	1	−3	2	−1
2	1	−1	0	−1

Dakle kvocijent dijeljenja polinoma p sa $x - 2$ je jednak $x^2 - x$, a ostatak -1.

Primjer 4.2.2. *Podijeli polinom $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ polinomom $q(x) = x - 1$.*

Rješenje: Podijelit ćemo zadane polinome koristeći Hornerov algoritam.

	1	−3	2	−1	1
1	1	−2	0	−1	0

Dakle, traženi kvocijent je $s(x) = x^3 - 2x^2 - 1$, a ostatak $r = 0$. Dakle, polinom p je djeljiv polinomom q.

Primjer 4.2.3. *Provjeri je li* $x_1 = 3$ *nultočka polinoma* $p(x) = 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 4x - 3$.

Rješenje:
Prema Teoremu 3.1.2. broj x_1 je nultočka polinoma ako je on djeljiv polinomom $x - x_1$. To možemo lako provjeriti Hornerovim algoritmom.

	3	−9	−1	4	−3
3	3	0	−1	1	0

Budući da je ostatak jednak 0, zaključujemo da je polinom p djeljiv polinomom $x - 3$. Dakle, $x_1 = 3$ je nultočka polinoma p.

4.3 Rastavljanje polinoma po potencijama

Rastaviti polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ po potencijama od $x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ znači prikazati ga u obliku

$$p(x) = a_n(x-\alpha)^n + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + a_1(x-\alpha) + a_0.$$

Cjelokupni rastav polinoma po potencijama od $x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ može se napraviti proširenim Hornerovim postupkom što će biti objašnjeno u sljedećem primjeru.

Primjer 4.3.1. *Rastavi polinom* $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ *po potencijama od* $x - 1$.

Rješenje:
Uzastopnom primjenom teorema o dijeljenju s ostatkom dobivamo

$$\begin{aligned}
x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 &= (x-1)(x^3 + 3x^2 - 4) - 3 \\
&= (x-1)\left[(x-1)(x^2 + 4x + 4) + 0\right] - 3 \\
&= (x-1)\{(x-1)[(x-1)(x+5) + 9] + 0\} - 3 \\
&= (x-1)\{(x-1)[(x-1)((x-1) + 6) + 9] + 0\} - 3 \\
&= (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 9(x-1)^2 - 3
\end{aligned}$$

Primijetimo da smo do rastava brže i elegantnije mogli doći koisteći uzastopnom primjenom Hornerovog algoritma. Nakon prvog retka, algoritam nastavljamo drugim retkom, zatim trećim itd.

	1	2	−3	−4	1
1	1	3	0	−4	−3
1	1	4	4	0	
1	1	5	9		
1	1	6			
1	1				

Posljednji brojevi u svakom retku su traženi koeficijenti prikaza.
Rezultat pišemo u obliku:

$$p(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 9(x-1)^2 - 3.$$

Primijetimo da sada pomoću Hornerova algoritma možemo riješiti i primjer 1.4.3.

Primjer 4.3.2. *Dan je polinom $p(x) = x^3 - x + 1$. Odredi polinom q takav da vrijedi $q(x-1) = p(x)$.*

Rješenje:
Primijetimo da se u zadatku zapravo traži da polinom p prikažemo po potencijama od $x-1$. Koristit ćemo Hornerov algoritam.

	1	0	−1	1
1	1	1	0	1
1	1	2	2	
1	1	3		
1	1			

Dakle, vrijedi

$$p(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 1.$$

Traženi polinom je

$$q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Primjer 4.3.3. *Odredi kratnost nultočke $x = 2$ polinoma $p(x) = 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 12x - 12$.*

Rješenje:
Provjerimo najprije je li $x = 2$ nultočka polinoma p. Koristit ćemo Hornerov algoritam.

	2	−8	5	12	−12
2	2	−4	−3	6	0

Dakle, $x = 2$ je nultočka polinoma p pa slijedi

$$p(x) = (x-2)(2x^3 - 4x^2 - 3x + 6). \tag{4.2}$$

Uzmimo polinom $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ i provjerimo je li $x = 2$ njegova nultočka. Ponovno koristimo Hornerov algoritam.

	2	-4	-3	6
2	2	0	-3	0

Dakle, $x = 2$ je nultočka polinoma g pa slijedi

$$g(x) = (x-2)(2x^2-3). \tag{4.3}$$

Sada iz (4.2) i (4.3) slijedi

$$p(x) = (x-2)(2x^3-4x^2-3x+6) = (x-2)(x-2)(2x^2-3) = (x-2)^2(2x^2-3).$$

Kako $x = 2$ očito nije nultočka polinoma $2x^2 - 3$ zaključujemo da je $x = 2$ dvostruka nultočka od p.

Poglavlje 5

Razni zadaci s polinomima

U ovom poglavlju se nalaze razni zadaci s polinomima koji su se pojavili na domaćim natjecanjima.

5.1 Algebra polinoma

Primjer 5.1.1. *(Županijsko natjecanje, 2 razred, 2005.)*
Neka je p polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(5) = 2005$. *Može li broj* $p(2005)$ *biti potpun kvadrat (kvadrat prirodnog broja)?*

Rješenje:
Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ promatrani polinom s cjelobrojnim koeficijentima n-tog stupnja. Tada imamo:

$$p(5) = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 5 + a_0,$$

$$p(2005) = a_n \cdot 2005^n + a_{n-1} \cdot 2005^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2005 + a_0.$$

Oduzimanjem dobivamo:

$$p(2005) - p(5) = a_n(2005^n - 5^n) + a_{n-1}(2005^{n-1} - 5^{n-1}) + \ldots + a_1(2005 - 5) + a_0. \quad (5.1)$$

Primijetimo da su izrazi u zagradama dijeljivi s 2000 jer općenito vrijedi

$$2005^k - 5^k = 2000\left(2005^{k-1} + 2005^{k-2} \cdot 5 + \ldots + 2005 \cdot 5^{k-2} + 5^{k-1}\right)$$

iz čega zaključujemo da su izrazi u zagradama (5.1) djeljivi s 2000.

Dakle, $p(2005) - p(5) = 2000a$, pri čemu je a neki cijeli broj. Slijedi $p(2005) = 2000a + p(5) = 2000a + 2005$.

Primijetimo da broj $P(2005)$ završava znamenkama 05. Uočimo da takav broj ne može biti potpuni kvadrat. Naime, kvadriranjem broja čija zadnja znamenka nije 5 dobivamo broj čija zadnja znamenka nije 5. Kvadriranjem broja čija je zadnja znamenka 5 dobivamo broj čija je su zadnje dvije znamenke 25. Preostaje dokazati tvrdnju.

Neka je n prirodan broj čija je zadnja znamenka 5, tj. n je oblika $n = 10b + 5$, $b \in \mathbb{N}$. Kvadriranjem dobivamo

$$n^2 = (10b + 5)^2 = 100b^2 + 100b + 25.$$

Zaključujemo da kvadrat prirodnog broja kojemu je zadnja znamenka 5 uvijek završava znamenkama 25.
Dakle, budući da broj $P(2005)$ završava znamenkama 05, on ne može biti kvadrat prirodnog broja.

Primjer 5.1.2. *(Županijsko natjecanje, 2 razred, 2003.)*
Dokaži da ne postoji polinom p s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(1) = 4$ i $p(4) = 9$.

Rješenje:
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da je

$$p(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 4,$$

$$p(4) = 4^n a_n + 4^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 4a_1 + a_0 = 9.$$

Oduzimanjem $p(4) - p(1)$ dobivamo:

$$(4^n - 1)a_n + (4^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (4 - 1)a_1 = 5. \tag{5.2}$$

Primijetimo da su brojevi u zagradama na lijevoj strani oblika

$$4^k - 1 = (4 - 1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 1) = 3 \cdot (4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 1),$$

dakle dijeljivi su s 3.
Kako su koeficijenti a_i $(i = 0, \ldots, n)$ polinoma p cijeli brojevi, broj na lijevoj strani jednakosti (5.2) je djeljiv s 3. Međutim na desnoj strani jednakosti je broj 5 koji očito nije djeljiv s 3. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna, tj. takav polinom p ne postoji.

Primjer 5.1.3. *(Školsko natjecanje, 4. razred, 2015., A varijanta)*
Koliki je koeficijent uz x^9 u polinomu $p(x) = (1 + x^3 + x^6)^{10}$?

Rješenje:
Koristit ćemo binomni poučak prema kojem vrijedi

$$(1+x^3+x^6)^{10} = ((1+x^3)+x^6)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}(1+x^3)^{10-k}x^{6k}.$$

Primijetimo da pribrojnici za koje je $k \geq 2$ ne doprinose koeficijentu x^9.
Za $k = 0$ imamo $(1+x^3)^{10}$ i koeficijent uz x^9 je $\binom{10}{3} = 120$.
Za $k = 1$ imamo $10 \cdot (1+x^3)^9 x^6$ i koeficijent uz x^9 je $10 \cdot 9 = 90$.
Konačno rješenje je $90 + 120 = 210$.

5.2 Djeljivost polinoma

Primjer 5.2.1. *(Općinsko natjecanje, 2.razred, 2005.)*
Nađi koeficijente a i b takve da polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ bude djeljiv s $x^2 - x - 1$.

Rješenje:
Podijelimo polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ s $x^2 - x - 1$.

$$\begin{array}{l}
(ax^5 + bx^4 + 1) : (x^2 - x - 1) = ax^3 + (b+a)x^2 + (2a+b)x + (3a+2b) \\
\underline{-(ax^5 - ax^4 - ax^3)} \\
\quad (b+a)x^4 + ax^3 + 1 \\
\underline{-\big((b+a)x^4 - (b+a)x^3 - (b+a)x^2\big)} \\
\qquad (2a+b)x^3 + (b+a)x^2 + 1 \\
\qquad \underline{-\big((2a+b)x^3 - (2a+b)x^2 - (2a+b)x\big)} \\
\qquad\qquad (3a+2b)x^2 + (2a+b)x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-\big((3a+2b)x^2 - (3a+2b)x - (3a+2b)\big)} \\
\qquad\qquad\qquad (5a+3b)x + 3a + 2b + 1
\end{array}$$

Kao kvocijent smo dobili polinom trećeg stupnja, a ostatak je linearni polinom $(5a + 3b)x + (3a + 2b + 1)$. Da bi polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ bio djeljiv s $x^2 - x - 1$, ostatak pri dijeljenju mora biti jednak 0. Slijedi:

$$(5a + 3b)x + (3a + 2b + 1) = 0$$

Prema teoremu o nulpolinomu znamo da su svi njegovi koeficijenti jednaki 0, odnosno:

$$5a + 3b = 0$$

$$3a + 2b + 1 = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo $a = 3$ i $b = -5$.

Primjer 5.2.2. *(Općinsko natjecanje, 2. razred, 2009., B kategorija)*
Polinom $p(x) = x^2 + ax + b$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x - 1$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju s $g_2(x) = x - 2$ ostatak 12. Odredi polinom $p(x)$.

Prvo rješenje:
Podijelit ćemo polinom $p(x)$ polinomom $g_1(x)$, a zatim polinomom $g_2(x)$. Budući da su $g_1(x)$ i $g_2(x)$ polinomi prvog stupnja, koristit ćemo Hornerov algoritam.

	1	a	b
1	1	$a+1$	$a+b+1$

	1	a	b
2	1	$a+2$	$2a+b+4$

Dijeljenjem polinoma $p(x)$ polinomom $g_1(x)$ dobije se ostatak $a + b + 1$, dok se dijeljenjem polinoma $p(x)$ polinomom $g_2(x)$ dobije ostatak $2a + b + 4$. Prema uvjetu zadatka prvi ostatak je jednak 6, a drugi je jednak 12.
Dakle, dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$a + b + 1 = 6$$
$$2a + b + 4 = 12.$$

Rješenje tog sustava je $a = 3$, $b = 2$.
Dakle, $p(x) = x^2 + 3x + 2$.

Drugo rješenje:
Zadatak se može vrlo brzo riješiti koristeći Bezoutov teorem. Prema Bezoutovom teoremu ostatak pri dijeljenju polinoma $p(x)$ s $x - a$ je zapravo vrijednost $p(a)$. Sada slijedi da je $p(1) = 6$ i $p(2) = 12$ te dobivamo isti sustav i rješenja kao u prvom rješenju.

Treće rješenje:
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom zadani polinom možemo zapisati na dva načina:

$$x^2 + ax + b = (x - 1)(x + \alpha) + 6 = x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha + 6,$$
$$x^2 + ax + b = (x - 2)(x + \beta) + 12 = x^2 + (\beta - 2)x - 2\beta + 12,$$

pri čemu su $x+\alpha$ i $x+\beta$ polinomi prvog stupnja i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Prema teoremu o jednakosti polinoma iz prve jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &= a \\ -\alpha + 6 &= b, \end{aligned}$$

a iz druge:

$$\begin{aligned} \beta - 2 &= a \\ -2\beta + 12 &= b. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &= \beta - 2, \\ -\alpha + 6 &= -2\beta + 12, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + 1 &= 0, \\ \alpha - 2\beta + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha = 4$ i $\beta = 5$ pa je onda $a = 3$ i $b = 2$.
Dakle, $p(x) = x^2 + 3x + 2$.

Primjer 5.2.3. *(Republičko natjecanje, 1. razred, 1989.)*
Odredi sve realne brojeve a i b takve da polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ bude djeljiv polinomom $x^2 - 2x - 3$.

Rješenje:
Zapišimo polinom p na sljedeći način

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 - 2x - 3)(x^2 + cx + d) = (x+1)(x-3)(x^2 + cx + d).$$

Gornja jednakost vrijedi za svaki realan broj x pa će posebno vrijediti za $x = -1$ i za $x = 3$.
Slijedi:

$$p(-1) = 0,$$

odnosno

$$a + b + 1 = 0.$$

$$p(3) = 0$$

odnosno

$$9a + b + 33 = 0.$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a + b + 1 &= 0 \\ 9a + b + 33 &= 0, \end{aligned}$$

čija su rješenja $a = -4$, $b = 3$.
Preostaje nam napraviti provjeru. Neka je $a = -4$ i $b = 3$ tada je $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$. Provjerimo da je polinom p djeljiv polinomom $x^2 - 2x - 3$.

$$\begin{array}{l} (x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3) : (x^2 - 2x - 3) = x^2 - 1 \\ \underline{-(x^4 - 2x^3 - 3x^2)} \\ \qquad\qquad -x^2 + 2x + 3 \\ \qquad\qquad \underline{-(-x^2 + 2x + 3)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Dakle, polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ je djeljiv polinomom $x^2 - 2x - 3$ za $a = -4$, $b = 3$.
Napomena: Zadatak smo mogli riješiti i analogno kao Primjer 5.2.1.

5.3 Nultočke i faktorizacija polinoma

Primjer 5.3.1. *(Školsko natjecanje, 2. razred, 2018. B varijanta)*
Neka su x_1, x_2 nultočke polinoma $p(x) = x^2 + x + 1$. Izračunajte $x_1^{2018} + x_2^{2018}$.

Rješenje:
Ako su x_1, x_2 nultočke polinoma $p(x) = x^2 + x + 1$ prema Vieteovim formulama vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ x_1 x_2 &= 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Kako su x_1 i x_2 nultočke polinoma, onda su one rješenja jednadžbe

$$x^2 + x + 1 = 0. \tag{5.4}$$

Množeći jednadžbu (5.4) s $(x - 1)$ dobivamo jednadžbu oblika

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

što je, koristeći formulu za razliku kubova, ekvivalentno s

$$x^3 - 1 = 0. \tag{5.5}$$

Dakle, budući da su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe (5.4), onda su i rješenja jednadžbe (5.5) pa vrijedi

$$x_1^3 = 1, \quad x_2^3 = 1. \tag{5.6}$$

Sada koristeći jednakosti (5.3), (5.6) i formulu za kvadrat zbroja dobivamo

$$\begin{aligned} x_1^{2018} + x_2^{2018} &= x_1^{2016} \cdot x_1^2 + x_2^{2016} \cdot x_2^2 \\ &= (x_1^3)^{672} \cdot x_1^2 + (x_2^3)^{672} \cdot x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

Primjer 5.3.2. *(Županijsko natjecanje, 4. razred, 2015. B varijanta)*
Nultočke polinoma $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 3$ su realni brojevi x_1, x_2, x_3 koji čine rastući aritmetički niz. Odredite koeficijent a i nultočke zadanog polinoma.

Rješenje:
Prema Vieteovim formulama za polinom trećeg stupnja vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{gathered} \tag{5.7}$$

Prema uvjetu zadatka x_1, x_2, x_3 su članovi rastućeg aritmetičkog niza te pišemo

$$x_1 = t - d, \ x_2 = t, \ x_3 = t + d,$$

gdje je $d > 0$ razlika tog aritmetičkog niza.

Sada iz prve jednadžbe sustava (5.7) dobivamo

$$t - d + t + t + d = 3,$$

$$t = 1.$$

Iz druge jednadžbe sustava (5.7) slijedi

$$a = (1 - d) + (1 - d)(1 + d) + (1 + d),$$

$$a = 3 - d^2.$$

Iz treće jednadžbe sustava (5.7) dobivamo

$$(1-d)(1+d) = -3,$$

$$d^2 = 4.$$

Budući da je $d > 0$, slijedi $d = 2$, pa su nultočke promatranog polinoma $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.
Koeficijent a jednak je

$$a = 3 - 2^2 = -1.$$

Dakle, polinom p je oblika $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a njegove nultočke su $-1, 1, 3$.
Preostaje provjeriti dobivena rješenja.
Vrijedi

$$p(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + 1 + 3 = -1 + 3 + 1 + 3 = 0,$$

$$p(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0,$$

$$p(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0.$$

Primjer 5.3.3. *(Državno natjecanje, 2. razred, 2011., A varijanta)*
Neka su a i b realni brojevi takvi da su sve nultočke polinoma

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$$

realne. Dokaži da vrijedi $a^2 \geq 2b + 12$.

Rješenje:
Polinom $P(x)$ ima tri nultočke, označimo ih x_1 i x_2 i x_3. Prema Vieteovim formulama je:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

$$x_1x_2x_3 = 8$$

Vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = a^2 - 2b$$

Budući da su x_1^2, x_2^2, x_3^2 pozitivni realni brojevi, za njih vrijedi aritmetičko-geometrijska nejednakost:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} \geq \sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2}$$

odnosno

$$a^2 - 2b \geq 3\sqrt[3]{64}.$$

Sada vrijedi

$$a^2 \geq 2b + 12$$

što smo i trebali dokazati.

Primjer 5.3.4. *(Županijsko natjecanje, 2. razred, 1994.)*
Odredi sve korijene polinoma $p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i$, $z \in \mathbb{C}$ znajući da je barem jedan od njih realan.

Rješenje:
Prvo u zapisu polinoma odvojimo realan i imaginaran dio, odnosno zapišimo polinom u obliku:

$$p(z) = 2z^3 - 5z^2 + 1 + (-6z^2 + 9z - 3)i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Označimo sa z_1 realnu nultočku polinoma p. Sada vrijedi $p(z_1) = 0$, odnosno

$$2z_1^3 - 5z_1^2 + 1 + (-6z_1^2 + 9z_1 - 3)i = 0.$$

Kako je $z_1 \in \mathbb{R}$, brojevi $2z_1^3 - 5z_1^2 + 1$ i $-6z_1^2 + 9z_1 - 3$ su također realni. Stoga, da bi gornja jednakost vrijedila i realni i imaginarni dio moraju biti jednaki 0. Dakle, dobivamo dvije jednadžbe

$$2{z_1}^3 - 5z_1^2 + 1 = 0$$

i

$$-6{z_1}^2 + 9z_1 - 3 = 0.$$

Rješavajući drugu jednadžbu dobivamo

$$z_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2 \cdot (-6)} = \frac{-9 \pm 3}{-12}.$$

Dakle, rješenja druge jednadžbe su $\frac{1}{2}$ i 1. Uvrštavajući dobivena rješenja u prvu jednadžbu

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0,$$
$$2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 = -2.$$

vidimo da prvu jednadžbu zadovoljava samo $\frac{1}{2}$ iz čega zaključujemo da je $z_1 = \frac{1}{2}$.
Dakle, polinom p ima realnu nultočku $\frac{1}{2}$. Sada prema Teoremu 3.1.2. slijedi da je polinom p djeljiv s $z - \frac{1}{2}$.

Podijelimo polinom $p(z)$ s $z - \dfrac{1}{2}$ koristeći Hornerov algoritam:

	2	$-5-6i$	$9i$	$1-3i$
$\frac{1}{2}$	2	$-4-6i$	$-2+6i$	0

Dakle, kvocijent dobiven dijeljenjem polinoma p sa $z - \frac{1}{2}$ je jednak $2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i$. Sada ćemo rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i = 0,$$

dobiti preostala dva korijena polinoma p:

$$z_{2,3} = \frac{4 + 6i \pm \sqrt{(4+6i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2+6i)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 + 6i \pm \sqrt{-4}}{4}.$$

Slijedi:

$$z_2 = \frac{4 + 6i + 2i}{4} = 1 + 2i$$

$$z_3 = \frac{4 + 6i - 2i}{4} = 1 + i.$$

Dakle, korijeni polinoma p su $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 1 + 2i$ i $z_3 = 1 + i$.

Primjer 5.3.5. *(Županijsko natjecanje, 4. razred, 2018., B varijanta)*
Odredi $n \in \mathbb{N}$ tako da polinom $p(x) = (2x^2+1)^{n+1} - (3x+15)^{2n}$ bude djeljiv polinomom $q(x) = x + 2$. Odredite u tom slučaju sve nultočke polinoma p koje nisu realne.

Rješenje:

Prema Teoremu 3.1.2. polinom p je djeljiv s $x + 2$ ako i samo ako je $p(-2) = 0$. Vrijedi $p(-2) = 9^{n+1} - 9^{2n}$. Rješavanjem jednadžbe $9^{n+1} - 9^{2n} = 0$, odnosno

$$9^{n+1} = 9^{2n},$$

dobivamo da je $n + 1 = 2n$, odnosno $n = 1$.
Dakle, iz uvjeta da je $p(x)$ djeljiv polinomom $q(x) = x + 2$, zaključili smo da je polinom p je jednak

$$p(x) = (2x^2+1)^2 - (3x+15)^2.$$

Preostaje pronaći nultočke polinoma p koje nisu realne. Primijetimo da polinom p možemo zapisati kao

$$p(x) = (2x^2 + 1 - 3x - 15)(2x^2 + 1 + 3x + 15) = (2x^2 - 3x - 14)(2x^2 + 3x + 16).$$

Nultočke polinoma dobit ćemo rješavanjem jednadžbe

$$(2x^2 - 3x - 14)(2x^2 + 3x + 16) = 0.$$

Gornja jednakost vrijedi kada je $2x^2 - 3x - 14 = 0$ ili $2x^2 + 3x + 16 = 0$. Diskriminanta kvadratne jednadžbe $2x^2 - 3x - 14 = 0$ je jednaka $D = 9 + 112 = 121$ što je veće od 0 pa će jednadžba imati samo realna rješenja. Dakle, budući da se traže nultočke koje nisu realne dovoljno je riješiti jednadžbu $2x^2 + 3x + 16 = 0$. Njena rješenja su

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 16}}{4} = \frac{-3 \pm i\sqrt{119}}{4}.$$

5.4 Polinomi i funkcijske jednadžbe

Primjer 5.4.1. *(Savezno natjecanje, 3.i 4. razred, 1982.) Odredi sve polinome p s cjelobrojnim koeficijentima, takve da za svaki realan broj x vrijedi* $16p(x^2) = (p(2x))^2$.

Rješenje:
Neka je $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ traženi polinom. Sada prema uvjetu zadatka vrijedi

$$16(a_n x^{2n} + \cdots + a_1 x^2 + a_0) = (2^n a_n x^n + \cdots + 2a_1 x + a_0)^2. \tag{5.8}$$

Uvrštavajući $x = 0$ u (5.8) dobivamo

$$16a_0 = a_0^2,$$

odakle je $a_0 = 0$ ili $a_0 = 16$.
Prema teoremu o jednakosti polinoma koeficijenti uz jednake potencije su jednaki. Dakle, koeficijenti uz x^{2n} u (5.8) moraju biti međusobno jednaki. Slijedi

$$16a_n = 2^{2n} a_n^2.$$

Budući da $a_n \neq 0$, vrijedi

$$a_n = \frac{16}{4^n}.$$

Budući da je a_n cijeli broj, to je $n = 0$, $n = 1$ ili $n = 2$.
Za $n = 0$ tražimo konstantne polinome koji zadovoljavaju uvjet zadatka i to su polinomi $p(x) = 0$ i $p(x) = 16$.
Za $n = 1$ tražimo polinome prvog stupnja vodećeg koeficijenta $a_1 = \frac{16}{4^1} = 4$ i slobodnog koeficijenta $a_0 = 0$ ili $a_0 = 16$ koji zadovoljavaju uvjet zadatka.
Jedini takvi polinomi su $p(x) = 4x$ i $p(x) = 4x + 16$.

Uvrštavajući polinom $p(x) = 4x$ u uvjet zadatka dobivamo:

$$16 \cdot 4(x)^2 = (4(2x))^2,$$

odnosno

$$64x^2 = 64x^2.$$

Jednakost vrijedi za svaki x pa polinom $p(x) = 4x$ zadovoljava uvjet zadatka. Još preostaje provjeriti za polinom $p(x) = 4x + 16$. Slijedi

$$16(4x^2 + 16) = (4(2x) + 16)^2,$$

$$64x^2 + 256 = 64x^2 + 256x + 256$$

$$256x = 0,$$

iz čega lako vidimo da jednakost vrijedi samo ako je $x = 0$. Dakle, zaključujemo da polinom $p(x) = 4x + 16$ ne zadovoljava uvjet zadatka jer jednakost mora vrijediti za svaki realan broj x.
Za $n = 2$ tražimo polinome drugog stupnja vodećeg koeficijenta $a_2 = \frac{16}{4^2} = 1$ i slobodnog koeficijenta $a_0 = 0$ ili $a_0 = 16$ koji zadovoljavaju uvjet zadatka. U obzir dolaze polinomi oblika $p(x) = x^2 + a_1x$ i $p(x) = x^2 + a_1x + 16$.
Uvrštavajući polinom $p(x) = x^2 + a_1x$ u uvjet zadatka dobivamo

$$16(x^4 + a_1x^2) = (4x^2 + 2a_1x)^2$$

$$16x^4 + 16a_1x^2 = 16x^4 + 16a_1x^3 + 4a_1^2x^2.$$

Sređujući prethodnu jednakost dobivamo

$$4a_1x^2 = 4a_1x^3 + a_1^2x^2. \tag{5.9}$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma iz (5.9) slijedi

$$4a_1 = a_1^2$$
$$0 = 4a_1$$

iz čega zaključujemo da je $a_1 = 0$. Dakle, polinom koji zadovoljava uvjet zadatka je $p(x) = x^2$. Preostaje napraviti provjeru. Uvršavajući polinom $p(x) = x^2$ u uvjet zadatka dobivamo

$$16x^4 = (4x^2)^2,$$

odnosno

$$16x^4 = 16x^4.$$

Dakle, jednakost vrijedi za svaki x pa polinom $p(x) = x^2$ zadovoljava uvjet zadatka. Preostaje provjeriti za polinom oblika $p(x) = x^2 + a_1x + 16$. Uvrštavajući polinom $p(x) = x^2 + a_1x + 16$ u uvjet zadatka dobivamo

$$16(x^4 + a_1x^2 + 16) = (4x^2 + 2a_1x + 16)^2$$

Sređujući gornji izraz dobivamo sljedeću jednakost

$$16a_1x^2 = 16a_1x^3 + (4a_1^2 + 128)x^2 + 64a_1x. \tag{5.10}$$

Sada prema teoremu o jednakosti polinoma iz (5.10) slijedi

$$\begin{aligned} 0 &= 16a_1 \\ 16a_1 &= 4a_1^2 + 128 \\ 0 &= 64a_1. \end{aligned}$$

Iz prve jednakosti gornjeg sustava dobivamo da je $a_1 = 0$ i uvrštavajući u drugu jednakost dobivamo da je $0 = 128$ što očito ne vrijedi. Dakle, jednakost (5.10) ne vrijedi ni za jedno a_1.

Traženi polinomi su $p(x) = 0$, $p(x) = 16$, $p(x) = 4x$ i $p(x) = x^2$.

Primjer 5.4.2. *(Republičko natjecanje, 1. razred, 1988.)*
Nađi sve polinome p za koje je $(p(x))^2 = p(x^2)$.

Rješenje:
Prvo promotrimo slučaj kada je p konstantan polinom, tj. $p(x) = c$. Sada iz $(p(x))^2 = p(x^2)$ slijedi $c^2 = c$, to jest $c \in \{0, 1\}$. Dakle, polinomi $p(x) = 0$ i $p(x) = 1$ zadovoljavaju danu jednadžbu.
Preostaje odrediti nekonstantne polinome (ako postoje) koji zadovoljavaju danu jednadžbu Neka je traženi polinom oblika $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$.
Primijetimo da je $p(0^2) = p(0) = a_0$, a $(p(0))^2 = a_0{}^2$. Iz uvjeta zadatka vrijedi $(p(x))^2 = p(x^2)$ iz čega zaključujemo da je $a_0 = a_0{}^2$.
Uočimo, da bi vrijedila jednakost $a_0 = a_0{}^2$, a_0 mora biti jednak ili 0 ili 1, tj. $a_0 \in \{0, 1\}$.
Imat ćemo dva slučaja:
1. slučaj
Pretpostavimo da je $a_0 = 1$.
Neka je k najmanji broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $a_k \neq 0$.
Tada vrijedi:

$$p(x) = a_nx^n + ... + a_kx^k + 1,$$
$$(p(x))^2 = a_n^2x^{2n} + 2a_na_{n-1}x^{2n-1} + \cdots + 2a_kx^k + 1,$$

$$p(x^2) = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2n-2} + \cdots + a_k x^{2k} + 1.$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma koeficijenti uz odgovarajuće potencije moraju biti jednaki. Promatrajući, na primjer, koeficijent uz potenciju x^k dobivamo $2a_k = 0$, tj. $a_k = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $a_k \neq 0$.

Dakle, a_0 ne može poprimiti vrijednost 1.

2. slučaj

Pretpostavimo da je $a_0 = 0$.

Neka je k najmanji broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ takav da je $a_k \neq 0$. Tada vrijedi:

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_k x^k = x^k (a_n x^{n-k} + ... + a_k) = x^k \cdot q(x),$$

$$(p(x))^2 = x^{2k} \cdot (q(x))^2,$$

$$p(x^2) = x^{2k} \cdot q(x^2).$$

Iz uvjeta $(p(x))^2 = p(x^2)$ slijedi da je $(q(x))^2 = q(x^2)$.

Sada analogno kao u prvom slučaju zaključujemo da je $a_k = 0$.

Dakle, mora biti $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ i $a_n = 1$.

Zaključujemo da su traženi polinomi oblika $p(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

Napravimo provjeru. Uvrštavajući $p(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ u danu jednakost $(p(x))^2 = p(x^2)$ dobivamo:

$$(x^n)^2 = x^{2n}$$

$$x^{2n} = x^{2n}.$$

Dakle, polinomi za koje vrijedi $(p(x))^2 = p(x^2)$ su oblika $p(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

Primjer 5.4.3. *(Republičko natjecanje, 2. razred, 1988.)*
Odredi sve polinome p za koje je

$$(x+1)p(x) = (x-2)p(x+1). \tag{5.11}$$

Rješenje:

Primijetimo da uvrštavajući $x = -1$ i $x = 2$ u (5.11) dobivamo $0 = -3p(0)$ i $3p(2) = 0$ iz čega slijedi $p(0) = 0$ i $p(2) = 0$. Nadalje, uvrštavajući $x = 0$ u (5.11) dobivamo $p(0) = -2p(1)$ iz čega slijedi da je $p(1) = 0$. Dakle, $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$ su nultočka polinoma p pa prema Teoremu 3.1.2. x, $(x-1)$ i $(x-2)$ dijele polinom p, što možemo zapisati na sljedeći način:

$$p(x) = x(x-1)(x-2)p_1(x). \tag{5.12}$$

Uvrštavajući $x + 1$ u (5.12) dobivamo:

$$p(x+1) = (x+1)(x+1-1)(x+1-2)p_1(x+1) = x(x-1)(x+1)p_1(x+1). \tag{5.13}$$

Uvrštavajući (5.12) i (5.13) u (5.11) dobivamo:

$$(x+1)x(x-1)(x-2)p_1(x) = (x-2)x(x-1)(x+1)p_1(x+1).$$

Podijelimo li gornju jednakost s $x(x-1)(x+1)(x-2)$, uz uvjet da je $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq 2$, dobivamo:

$$p_1(x) = p_1(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}. \tag{5.14}$$

Neka je p_1 polinom stupnja l. Definirajmo polinom

$$r(x) = p_1(x) - p_1(x+1). \tag{5.15}$$

Iz (5.14) i (5.15) slijedi da je $r(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$. Budući da je p_1 polinom stupnja l, iz (5.15) slijedi da je i r polinom stupnja najviše l pa prema Teoremu 3.2.2. ima najviše l nultočaka. No primijetimo da r sigurno ima više od l međusobno različitih nultočaka, npr. $3, 4, 5, \ldots, l+3$. Dakle, da bi vrijedila jednakost (5.14) polinom p_1 mora biti konstantan, tj. $p_1(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.
Budući da znamo da je $p(x) = (x-2)p_1(x)$ slijedi $p(x) = ax(x-2)(x-1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Dakle, traženi polinom p je oblika $p(x) = ax(x-1)(x-2)$, $a \in \mathbb{R}$.
Preostaje provjeriti dobiveno. Uvrstimo p u uvjet zadatka i dobivamo

$$(x+1)ax(x-2)(x-1) = (x-2)a(x+1)(x+1-2)(x+1-1)$$

$$ax(x+1)(x-2)(x-1) = ax(x+1)(x-2)(x-1).$$

Jednakost vrijedi pa polinom je $p(x) = ax(x-2)(x-1)$ zadovoljava uvjet zadatka.

Primjer 5.4.4. *(Državno natjecanje, 4. razred, 1994.)*
Odredi polinom $p(x)$ s realnim koeficijentima takav da za neki prirodni broj n vrijedi

$$xp(x-n) = (x-1)p(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje:
Ako je $p(x) = 0$ tada tražena jednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Promatrajmo sada slučajeve kada polinom p nije nulpolinom.

Neka je $n > 1$ i k stupanj polinoma p. Uvrstimo u danu relaciju $x = 0, x = n, x = 2n, \ldots, x = mn, x = (m+1)n, \ldots, x = kn$.
Redom dobivamo:
za $x = 0$

$$0 \cdot p(-n) = -1 \cdot p(0) \quad \Rightarrow p(0) = 0$$

za $x = n$

$$n \cdot p(0) = (n-1) \cdot p(n) \Rightarrow p(n) = 0 \text{ jer je } p(0) = 0$$

za $x = 2n$

$$2n \cdot p(n) = (2n-1) \cdot p(2n) \Rightarrow p(2n) = 0 \text{ jer je } p(n) = 0$$

$\vdots$

za $x = mn$

$$mn \cdot p((m-1)n) = (mn-1) \cdot p(mn) \Rightarrow p(mn) = 0 \text{ jer je } p((m-1)n) = 0$$

za $x = (m+1)n$

$$(m+1)n \cdot p(mn) = ((m+1)n-1) \cdot p((m+1)n) \Rightarrow p((m+1)n) = 0 \text{ jer je } p(mn) = 0$$

$\vdots$

za $x = kn$

$$kn \cdot p((k-1)n) = (kn-1) \cdot p(kn) \Rightarrow p(kn) = 0 \text{ jer je } p((k-1)n) = 0$$

Primijetimo da polinom $p(x)$ ima $k+1$ nultočaka $0, n, 2n, \dots, kn$, što ne može biti budući da je polinom p stupnja k. Dakle, za $n > 1$ ne postoje takvi polinomi te je zato $p(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Neka je $n = 1$. Sada $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$xp(x-1) = (x-1)p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

Primijetimo da uvrštavajući $x = 0$ u (5.16) dobivamo $0 = -p(0)$, tj. $p(0) = 0$. Dakle, $x = 0$ je nultočka polinoma p pa prema Teoremu 3.1.2. x dijeli polinom p, što možemo zapisati na sljedeći način:

$$p(x) = xq(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Uvrštavajući $x-1$ u (5.17) dobivamo

$$p(x-1) = (x-1)q(x-1). \tag{5.18}$$

Uvrštavajući (5.17) i (5.18) u (5.16) dobivamo

$$x(x-1)q(x-1) = (x-1)xq(x). \tag{5.19}$$

Dijeljenjem gornje jednakosti s $x(x-1)$, pri čemu je $x \neq 0$ i $x \neq 1$, slijedi

$$q(x-1) = q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \tag{5.20}$$

Neka je q polinom stupnja l. Definirajmo polinom

$$r(x) = q(x-1) - q(x). \tag{5.21}$$

Iz (5.20) i (5.21) slijedi da je $r(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Budući da je q polinom stupnja l, iz (5.20) slijedi da je r polinom stupnja najviše l pa prema Teoremu 3.2.2. ima najviše l nultočaka. No primijetimo da r sigurno ima više od l međusobno različitih nultočaka, npr. $2, 3, 4, \ldots, l+2$. Dakle, da bi vrijedila jednakost (5.20) polinom q mora biti konstantan, odnosno $q(x) = a, a \in \mathbb{R}$.
Dakle, budući da je $p(x) = xq(x)$ slijedi $p(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Bibliografija

[1] Dakić B., Elezović N., *Matematika 1, udžbenik i zbrika zadataka za prvi razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2009.

[2] Dakić B., Elezović N., *Matematika 2, udžbenik i zbrika zadataka za drugi razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2009.

[3] Dakić B., Elezović N., *Matematika 2, dodatak za drugi razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2006.

[4] Kadelburg Z., Mladenović P., *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1990.

[5] Pavković B., Dakić B., *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[6] Dimitrijević R., *Zbirka zadataka iz teorije polinoma*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2011.

[7] Pavković B., Veljan D., *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[8] Ilišević D., Muić G., *Uvod u matematiku*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/uum.pdf` (srpanj 2018.)

[9] Ungar Š. *Matematička analiza 4*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza4.pdf` (srpanj 2018.)

[10] Antonija Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH* dostupno na `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm` (srpanj 2018.)

Sažetak

U ovom radu proučili smo pojam polinoma i načine obrade polinoma na dodatnoj nastavi. Prvo smo obuhvatili algebru polinoma gdje smo definirali polinom i njegova osnovna svojstva te smo izvodili osnovne računske operacije s polinomima. Posebno smo se osvrnuli na djeljivost polinoma te smo naveli postupak dijeljenja dvaju polinoma i svojstva dobivenog ostatka.

Definirali smo nultočke polinoma i njihova svojstva te proveli faktorizaciju polinoma. Pomoću Hornerovog algoritma vidjeli smo kako efikasnije i brže računati vrijednost polinoma u nekoj točki i dijeliti polinomom prvog stupnja. Na kraju smo naveli i riješili zadatke s polinomima koji su se pojavili na domaćim natjecanjima.

Summary

In this paper we have examined the concept of polynomial and the methods of teaching polynomial in extra classes. First we covered the algebra of polynomial and defined the polynomial, its basic properties and performed basic polynomial operations. Particularly, we discussed the divisibility of polynomial and we specified the process of polynomial long division and the properties of the obtained remainder.

We defined zeros of polynomial and their properties and we factorized the polynomial. Using Horner's algorithm, we have seen how to efficiently and quickly find the value of a polynomial at a given point and how to divide by the first degree polynomial. Lastly, we have pointed out and solved problems with the polynomials that have appeared in domestic competitions.

Životopis

Rođena sam u Varaždinu, 10. 2. 1993. godine. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 1999. godine u Osnovnoj školi Novi Marof. Godine 2007. upisala sam matematički smjer Prve gimnazije u Varaždinu. Nakon završene srednje škole upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog sveučilišnog studija 2015. godine, upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematka; smjer nastavnički.